

Innehållet:

- determinanter.

1. Proposition.

- Låt A vara $n \times n$ matris. Då $\det(A) = \det(A^T)$.

$$\bullet \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}. \quad \text{Determinanten av triangel}$$

matris kan beräknas genom att multiplicera alla koefficienterna på diagonalen.

- Låt A vara $n \times n$ matris som genom följande operationer kan transformeras till triangel matris B :

(1) $R_i \mapsto R_i + \alpha R_j$ ($i \neq j$)

(2) $C_i \mapsto C_i + \alpha C_j$ ($i \neq j$)

(3) $R_i \mapsto R_j$ och $R_j \mapsto R_i$

(4) $C_i \mapsto C_j$ och $C_j \mapsto C_i$

Då $\det(A) = (-1)^{\text{antalet av transformationer (3) och (4)}} b_{11}b_{22} \cdots b_{nn}$.

2. Uppgift. Beräkna determinanten av:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 13 & 3 \\ 1 & 0 & 17 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Uppgift. Beräkna:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Proposition. Låt A vara $n \times n$ matris.

- (1) $\det A = 0$ om och endast om kolonnerna är linjer beroende.
- (2) $\det A = 0$ om och endast om rang av A är mindre än n .
- (3) $\det A = 0$ om och endast om $\ker(A) \neq 0$.
- (4) $\det A \neq 0$ om och endast om kolonnerna är linjer oberoende.
- (5) $\det A \neq 0$ om och endast om kolonnerna bildar en bas till \mathbb{R}^n .
- (6) $\det A \neq 0$ om och endast om rank av A är lika med n .

5. **Uppgift.** Hitta alla värde av a så att följande vektorer är linjär oberoende:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ a \\ 3 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

6. **Proposition.** Låt A vara $n \times n$ matris. Om vi ta bort i -te rad och j -te kolonn, får vi en $(n-1) \times (n-1)$ som vi betecknar med A_{ij} .

(1) Välj en i -te rad.

$$\det(A) = (-1)^{i+1}a_{i1}\det(A_{i1}) + (-1)^{i+2}a_{i2}\det(A_{i2}) + \dots + (-1)^{i+n}a_{in}\det(A_{in})$$

(2) Välj en j -te kolonn.

$$\det(A) = (-1)^{1+j}a_{1j}\det(A_{1j}) + (-1)^{2+j}a_{2j}\det(A_{2j}) + \dots + (-1)^{n+j}a_{nj}\det(A_{nj})$$

7. **Uppgift.** Beräkna

$$\det \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

8. **Proposition.**

(1) $n \times n$ matris A är inverterbar om och endast om $\det(A) \neq 0$.

(2) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ är inverterbar om och endast om $ad - bc \neq 0$. I så fall

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

är inversen till A .

(3) Kolonnerna av en $n \times n$ matris A bildar en bas i \mathbb{R}^n om och endast om $\det(A) \neq 0$.

(4) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(5) Om $n \times n$ matris A är inverterbar, då $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

(6) $|\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}|$ är arean av parallelogram i planet som spans av vektorer $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$.

(7) $|\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}|$ är arean av parallelogram i planet som spans av vektorer $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$.

(8) $|\det [\vec{C}_1 \ \vec{C}_2 \ \vec{C}_3]|$ är volymen av parallelogram i rummet som spans av kolonnerna \vec{C}_1 , \vec{C}_2 , och \vec{C}_3 .

(9) $\left| \det \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} \right|$ är volymen av parallelogram i rummet som spans av raderna R_1^T , R_2^T , och R_3^T .

9. **Uppgift.** Undersök om $A = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ är inverterbar. Om det är inverterbar bestäm inversen till A .

10. **Uppgift.** Låt:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Beräkna $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(AB)$ and $\det(BA)$.

11. **Uppgift.** Beräkna arean av parallelogram som spans av $\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

12. **Uppgift.** Beräkna volymen av parallelogram i rummet som spans av $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ och } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}.$$