November 10, 2015. Föreläsning 16.

Tillämpad linjär algebra

Innehållet:

- Eigenvektorer och eigenvärden

1. **Definition.** Låt A vara $n \times n$ matris. En vektor $\vec{v} \neq 0$ i $\mathbb{R}^n$ kallas för en egenvektor till A med egenvärde λ om $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ dvs om $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$.

2. **Definition.** Låt A vara $n \times n$ matris.

$$E_\lambda := \ker(A - \lambda I_n)$$

E_λ är ett delrum i $\mathbb{R}^n$. Vektorer i $E_\lambda \setminus \{0\}$ är egenvektoer med egenvärde λ.

3. **Proposition.** Låt A vara $n \times n$ matris. Följande är ekvivalenta:
   (1) λ är en egenvärde till A (dvs det finns en vector $\vec{v} \neq 0$ i $\mathbb{R}^n$ så att $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$).
   (2) $E_\lambda = \ker(A - \lambda I_n) \neq 0$.
   (3) $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

4. **Definition.** Låt A vara $n \times n$ matris. Ekvation:

$$\det(A - xI_n) = 0$$

kallas för karakteristik ekvation till A.

5. **Proposition.** Låt A vara $n \times n$ matris. λ är en eigenvärde till A om och endast om λ uppfyller karakteristik ekvation till A:

$$\det(A - xI_n) = 0$$

6. **Uppgift.** Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Hitta karakteristik ekvation till A, egenvärde, och egenvektorer.

7. **Definition.** Låt A vara $n \times n$ matris.
   (1) om $\det(A - xI_n) = (x - \lambda)^k g(x)$ och $g(\lambda) \neq 0$, då k kallas för algebraisk multiplicitet av λ.
   (2) $\dim E_\lambda = \dim(\ker(A - \lambda I_n))$ kallas för geometrisk multiplicitet av λ.

Altså geometrisk multiplicitet av λ är max antalet av linjär oberoende eigenvektorer med eigenvärde λ.

8. **Proposition.** Låt A vara $n \times n$ matris. Då:

$$\text{geometrisk multiplicitet} \leq \text{algebraisk multiplicitet}$$

9. **Uppgift.** Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Hitta eigenvärden till A och motsvarande algebraisk och geometrisk muliplicitеter och egenvektorer.

10. **Uppgift.** Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Hitta eigenvärden till A och motsvarande algebraisk och geometrisk muliplicitet och egenvektorer.

11. **Uppgift.** Låt $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Hitta eigenvärden till A och motsvarande algebraisk och geometrisk muliplicitet och egenvektorer.

12. **Proposition.** Låt $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ vara eigenvektorer till A som motsvarar olika eigenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Då vektorerna $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ är linjär oberoende.

13. **Uppgift.** Har följande matris en bas som består av eigenvektorer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 13 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

14. **Proposition.** Eigenvärdena av en triangel matris A består av coefficienterna av A som står på diagonalen.

15. **Uppgift.** Bestäm eigenvärdena och motsvarande algebraisk och geometrisk muliplicitet och egenvektorer till:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

16. **Proposition.** Låt A vara $n \times n$ symmetrisk matris. Då:

(1) det finns en bas till $\mathbb{R}^n$ som består av eigenvektorer;
(2) geometrisk muliplicitet=algebraiskt muliplicitet
(3) of v och w är eigenvektorer till A som har olika eigenvärden, då v och w är ortogonala.

17. **Uppgift.** Verifiera att Proposition 16 håller för följande matris:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$