17 november, 2015, Föreläsning 17

Tillämpad linjär algebra

Innehåll:

- Baser (repetition)
- Ortogonalt komplement
- Matrisens olika delrum

Baser

1. **Definition.** Låt V vara ett delrum i $\mathbb{R}^n$. En bas till V består av linjärt oberoende vektorer $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ sådana att span$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$=V.

- Ett delrum V kan har flera baser.
- Alla baser till V har samma antal vektorer.
- En bas till V består av det minsta antal vektorer som spänner V.
- En bas består av det största antalet linjärt oberoende vektorer som ligger i V.
- Låt V =span$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$. De vektorer som motsvarar pivotkolonnerna i en radreducerad matris A med $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ som kolonner bildar en bas till V.
- Antalet vektorer som utgör en bas till V är samma som matrisen A's rang.
- Basens dimension ges av antalet vektorer i basen.

Ortogonala komplement

2. **Definition.** Låt V vara ett delrum i $\mathbb{R}^n$. En vektor $\vec{w}$ i $\mathbb{R}^n$ är ortogonal mot V om den för varje vektor $\vec{v}$ i V är sådan att $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$. Det delrum i $\mathbb{R}^n$ som består av alla vektorer som är ortogonala mot V kallas för det ortogonala komplementet till V och betecknas med $V^{\perp}$.

3. **Proposition.** Låt V vara ett delrum i $\mathbb{R}^n$. Då är

- $V^{\perp}$ också ett delrum av $\mathbb{R}^n$,
- $\dim(V^{\perp}) = n - \dim(V)$.
- $(V^{\perp})^{\perp} = V$.

4. **Uppgift.** (Tenta 15-06-10)

Låt V =span$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ där $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

a) Bestäm en bas för det ortogonala komplementet, $V^{\perp}$, samt ange $\dim(V^{\perp})$ och $\dim(V)$.

Matrisens olika delrum

5. Betrakta $m \times n$-matrisen och dess transponat

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Låt vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ beteckna kolonnerna i A (och transponatet av raderna i A^T) och låt vektorerna $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m$ beteckna transponatet av raderna i A (och kolonnerna i A^T), dvs

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, \vec{v}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{bmatrix}, \ldots, \vec{w}_m = \begin{bmatrix} a_{m1} \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Bildrummet till A**, im**(A), (samma som $\mathrm{col}(A)$) är ett delrum till $\mathbb{R}^m$ och ges av $\mathrm{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$.

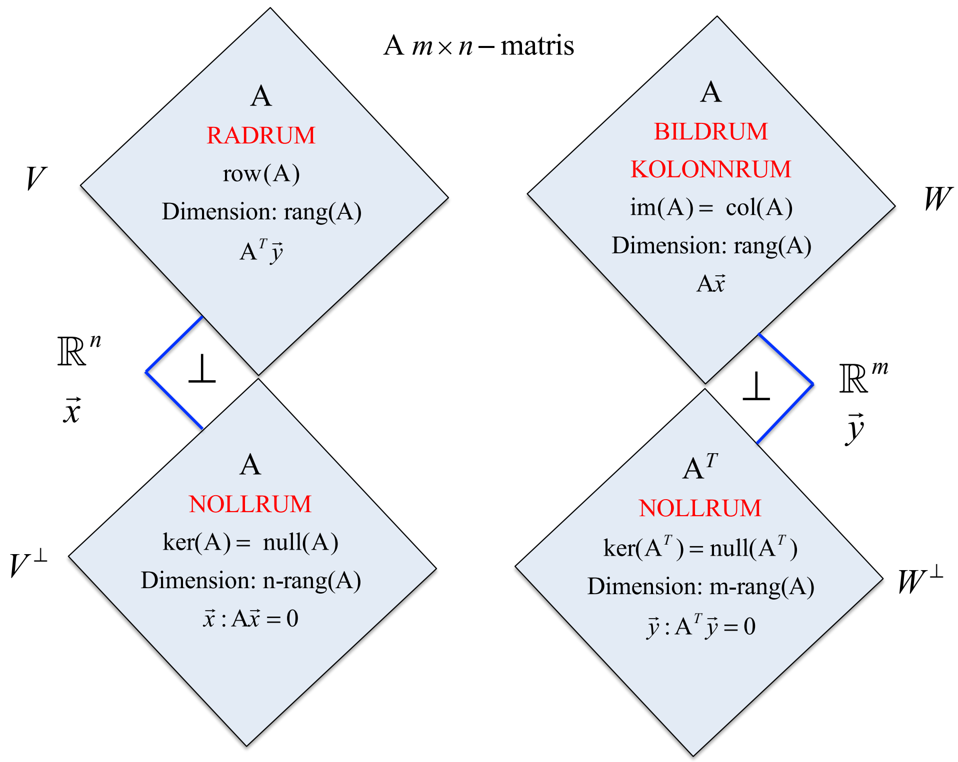
- I bildrummet till A ligger alla vektorer, $\vec{y}$, som kan skrivas som en linjärkombination av kolonnerna i A, dvs $A\vec{x}$, där $\vec{x}$ är en godtycklig vektor i $\mathbb{R}^n$.
- $\dim(\mathrm{im}(A)) = \mathrm{rank}(A) =$ antal pivotkolonner i A.
- Basen till $\mathrm{im}(A)$ ges av de vektorer som motsvarar pivotkolonnerna efter radreducering.

Radrummet till A**, row**(A), är ett delrum till $\mathbb{R}^n$ och ges av $\mathrm{span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m\}$.

- I radrummet till A ligger alla vektorer, $\vec{x}$, som kan skrivas som en linjärkombination av raderna i A, dvs $A^T\vec{y}$ där $\vec{y}$ är en godtycklig vektor i $\mathbb{R}^m$
- $\dim(\mathrm{row}A)) = \mathrm{rank}(A)$.
- Basen till $\mathrm{row}(A)$ ges av alla nollskilda rader i A efter radreducering.

Nollrummet till A**, ker**(A), (samma som $\mathrm{null}(A)$ i Anton) är ett delrum till $\mathbb{R}^n$ och ges av lösningarna till $A\vec{x} = \vec{0}$. Dvs det består av alla vektorer $\vec{x}$ i $\mathbb{R}^n$ sådana att $A\vec{x} = \vec{0}$.

- $\dim(\ker(A)) = n -\ \mathrm{rank}(A) =$antalet fria variabler i A.



FIGUR 1. Sammanfattning av en matris olika delrum. Givet en $m \times n$-matris A med rang r, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ och $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ så kan vi definiera följande del/underrum till $\mathbb{R}^m$ respektive $\mathbb{R}^n$. Matrisen A's radrum är ortogonalt mot A's nollrum och A's bildrum (kolonnrum) är ortogonalt mot A^T's nollrum. (Strang-diagram, se Anton s.387)

6. **Uppgift.** Låt W vara ett delrum av $\mathbb{R}^n$.

a) Om W =ker(A) (i Anton W =null(A)) vad är då $W^\perp$?
b) Om W =im(A) (i Anton W =col(A)) vad är då $W^\perp$?

Lösning: Se sidan 345 i Anton.

7. **Uppgift.** Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & -9 & 6 & 12 & -3 \\ -2 & 6 & 5 & 1 & 11 \end{bmatrix}.$$

Matrisens radreducerade form ges av

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Bestäm $\ker(A)$ (=null(A)).
b) Bestäm en bas till $\ker(A)$.
c) Bestäm $\dim(\ker(A))$.
d) Bestäm $\ker(A)^{\perp}$.
e) Bestäm en bas till $\ker(A)^{\perp}$.
f) Bestäm $\dim(\ker(A)^{\perp})$.
g) Bestäm im(A) (=col(A)).
h) Bestäm en bas till im(A).
i) Bestäm dim(im(A)).
j) Bestäm en bas till row(A).
k) Bestäm dim(row(A)).

Notera följande

Om A är en $m \times n$-matris med rang n (full rang) så gäller att $A\vec{x} = \vec{0}$ har bara den triviala lösningen och $A\vec{x} = \vec{b}$ har som mest en lösning för varje $\vec{b}$ i $\mathbb{R}^m$.

8. **Uppgift.** Låt $m \times n$-matrisen A ha full rang

a) Vad är då rang(A)?
b) Vilken dimension har bild/kolonnrummet, im(A) (col(A))?
c) Vilken dimension har nollrummet, $\ker(A)$ (null(A))?
d) Vad gäller för lösningen till $A\vec{x} = \vec{0}$?
e) Vad gäller för lösningen till $A\vec{x} = \vec{b}$ för ett godtyckligt $\vec{b}$ i $\mathbb{R}^m$?
f) Om vi vet att $\vec{b}\in$im(A) (col(A)) , vad gäller då för lösningen till $A\vec{x} = \vec{b}$?

Lösning: b), c) se satserna 7.4.1 och 7.4.2 i Anton. d), e), f), se satserna 7.5.6 och 7.5.3 i Anton.