

Innehåll:

- Koordinater i olika baser
- Basbyten

### Koordinater i olika baser

1. **Definition.** Låt  $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$  vara en bas för ett delrum  $W$  i  $\mathbb{R}^n$ . Då kan varje vektor  $\vec{w}$  i  $W$  skrivas på ett unikt sätt som en linjärkombination

$$\vec{w} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_k\vec{v}_k.$$

Koefficienterna,  $c_1, c_2, \dots, c_k$  kallas för koordinater med avseende på basen  $\mathcal{B}$ . För att beteckna vektorn  $\vec{w}$ 's koordinater i basen  $\mathcal{B}$  skriver man

$$[\vec{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}$$

$[\vec{w}]_{\mathcal{B}}$  kallas för koordinatvektor (eller koordinatmatris - i Anton).

Notera att koordinaterna för  $\vec{w}$  i basen  $\mathcal{B}$  uppfyller följande likhet

$$[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_k][\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \vec{w}$$

### 2. Standardbas

Vektorerna  $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , och  $\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  bildar en bas till  $\mathbb{R}^3$ . Den kallas

för standardbas. I standardbasen har vektorn  $\vec{w} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$  koordinaterna  $\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ .

3. **Uppgift.**  $V = \text{Span}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  där  $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  och  $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  i  $\mathbb{R}^3$ . Låt  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  vara en bas för  $V$ .

Bestäm vektorn  $\vec{v}$ 's koordinater i basen  $\mathcal{B}$  om  $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

4. **Uppgift.**  $V = \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  där

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Visa att  $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  är en bas för  $V$ .

b) Låt  $\vec{v}$  vara en vektor i  $V$  som i basen  $\mathcal{B}$  har koordinaterna  $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ . Bestäm  $\vec{v}$ .

c) Undersök om vektorn  $\vec{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$  ligger i  $V$ . I sådant fall, bestäm koordinaterna av  $\vec{w}$  i basen  $\mathcal{B}$ .

## Basbyten och basbytesmatriser

5. **Proposition.** Låt  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  vara vektorer i  $\mathbb{R}^n$ . Följande påståenden är ekvivalenta

- (1)  $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  är en bas till  $\mathbb{R}^n$ .
- (2)  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  är linjärt oberoende.
- (3)  $\text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} = \mathbb{R}^n$ .
- (4) En matris med basvektorerna som kolonner,  $A = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_n]$  är inverterbar.

6. Låt  $\vec{v}$  vara en vektor i  $\mathbb{R}^n$ . Antag att vi byter från en bas  $\mathcal{B}_1$  till en annan bas  $\mathcal{B}_2$ . Hur ser relationen ut mellan koordinaterna för  $\vec{v}$  i  $\mathcal{B}_1$ ,  $[\vec{v}]_{\mathcal{B}_1}$  och koordinaterna för  $\vec{v}$  i  $\mathcal{B}_2$ ,  $[\vec{v}]_{\mathcal{B}_2}$  ut?

Låt  $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ . För att hitta koordinaterna för  $\vec{v}$  med avseende på basen  $\mathcal{B}_1$  måste vi lösa systemet

$$[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_n][\vec{v}]_{\mathcal{B}_1} = \vec{v}.$$

Dvs koordinaterna för  $\vec{v}$  i basen  $\mathcal{B}_1$  ges av

$$(1) \quad [\vec{v}]_{\mathcal{B}_1} = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_n]^{-1}\vec{v}.$$

Låt  $\mathcal{B}_2 = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n\}$ . För att hitta koordinaterna för  $\vec{v}$  med avseende på basen  $\mathcal{B}_2$  måste vi lösa systemet

$$[\vec{w}_1 \ \vec{w}_2 \ \dots \ \vec{w}_n][\vec{v}]_{\mathcal{B}_2} = \vec{v}.$$

Dvs koordinaterna för  $\vec{v}$  i basen  $\mathcal{B}_2$  ges av

$$(2) \quad [\vec{v}]_{\mathcal{B}_2} = [\vec{w}_1 \ \vec{w}_2 \ \cdots \ \vec{w}_n]^{-1} \vec{v}.$$

Från sambanden (1) och (2) ovan kan vi hitta en relation mellan  $[\vec{v}]_{\mathcal{B}_2}$  och  $[\vec{v}]_{\mathcal{B}_1}$

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}_2} = [\vec{w}_1 \ \vec{w}_2 \ \cdots \ \vec{w}_n]^{-1} \vec{v} = [\vec{w}_1 \ \vec{w}_2 \ \cdots \ \vec{w}_n]^{-1} [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \cdots \ \vec{v}_n] [\vec{v}]_{\mathcal{B}_1}$$

Matrisen  $[\vec{w}_1 \ \vec{w}_2 \ \cdots \ \vec{w}_n]^{-1} [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \cdots \ \vec{v}_n]$  kallas för basbytesmatris (övergångsmatris) från  $\mathcal{B}_1$  till  $\mathcal{B}_2$  och betecknas med  $P_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2}$ . Dvs

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}_2} = P_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2} [\vec{v}]_{\mathcal{B}_1}.$$

### 7. Proposition (se teorem 7.11.3 i Anton).

Basbytesmatrisen ges av

$$P_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2} = [[\vec{v}_1]_{\mathcal{B}_2} \ [\vec{v}_2]_{\mathcal{B}_2} \ \cdots \ [\vec{v}_n]_{\mathcal{B}_2}].$$

där kolonnerna i matrisen är koordinaterna för basen  $\mathcal{B}_1$  med avseende på basen  $\mathcal{B}_2$ .

### 8. Uppgift.

a) Bevisa att följande vektorer bildar en bas i  $\mathbb{R}^3$ :

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Låt  $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$

b) Bevisa att följande vektorer bildar en bas i  $\mathbb{R}^3$ :

$$\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Låt  $\mathcal{B}_2 = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ .

c) Antag att  $[\vec{v}]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ . Bestäm  $[\vec{v}]_{\mathcal{B}_2}$ .

d) Antag att  $[\vec{w}]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ . Bestäm  $[\vec{w}]_{\mathcal{B}_1}$ .

9. Om  $U$  är ett delrum i  $\mathbb{R}^n$  och  $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$  och  $\mathcal{B}_2 = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k\}$  är två baser till  $U$ . Då är basbytesmatrisen från  $\mathcal{B}_1$  till  $\mathcal{B}_2$  en  $k \times k$  matris  $P_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2}$  sådan att för alla vektorer  $\vec{u}$  i  $U$  gäller

$$P_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2} [\vec{u}]_{\mathcal{B}_1} = [\vec{u}]_{\mathcal{B}_2}$$

10. **Uppgift.** (Tenta 4/6-13, B-delen)

Vektorerna

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bildar en bas  $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$  för delrummet  $W$  i  $\mathbb{R}^4$ . Matrisen

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

är övergångsmatrisen (basbytesmatrisen) som omvandlar koordinater med avseende på basen  $\mathcal{B}_1$  till koordinater med avseende på basen  $\mathcal{B}_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ . Bestäm vektorerna  $\vec{v}_1$  och  $\vec{v}_2$ .

11. **Uppgift.** (Tenta 13/12-12, B-delen)

Låt  $\mathcal{B} = \{\vec{e}, \vec{f}\}$  vara en bas för ett delrum  $V$  i  $\mathbb{R}^n$ . Låt  $\vec{u}$  och  $\vec{v}$  vara två vektorer i  $\mathbb{R}^n$  som uppfyller relationerna

$$\vec{u} + \vec{e} = \vec{v} \quad \vec{f} + 2\vec{u} = -3\vec{v}$$

- a) Bestäm koordinatvektorn till  $\vec{v}$  med avseende på basen  $\mathcal{B}$ .
- b) Visa att vektorerna  $\vec{u}$  och  $\vec{v}$  också utgör en bas för  $V$ .