

Uppgifter, 2015  
Tillämpad linjär algebra

**Geometri.**

1. **Uppgift.** Låt  $A = (1, 1, 1)$ ,  $B = (-1, 2, 3)$ ,  $C = (1, 1, 0)$  vara punkter i  $\mathbb{R}^3$ .
- (1) Beskriva på parameter form alla plan som innehåller  $A$ ,  $B$  och  $C$ . Ger ett system av linjära ekvationer som beskriver planet
  - (2) Låt  $L$  vara en linje genom  $A$  och  $B$ . Beskriva  $L$  på parameter form. Ger ett system av linjära ekvationer som beskriver  $L$ .
  - (3) Beräkna avståndet mellan  $C$  och linjen  $L$ .
  - (4) Beräkna area av triangel  $ABC$ .
  - (5) Beräkna area av parallelogram som spänns av  $A$ ,  $B$ , och  $C$ .

2. **Uppgift.** Låt:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}$$

- (1) Bestäm en ekvation för planet  $\text{Span}(\vec{v}, \vec{w})$ .
  - (2) Bestäm  $a$  såatt  $\vec{u}$  ligger i planet  $\text{Span}(\vec{v}, \vec{w})$ .
3. **Uppgift.** Betrakta en linje  $L_1$  i  $\mathbb{R}^3$  som ges av  $(1, 1, 1) + t(1, 2, 2)$ .
- (1) Bestäm alla värden på  $a$  så att linjen  $L_2$  genom  $(-1, -1, 2)$  och  $(a, 5, 5)$  skär linjen  $L_1$  och bestäm skärningen.
  - (2) För alla värden från (1), bestäm en ekvation av planet som innehåller  $L_1$  och  $L_2$ .

4. **Uppgift.** Låt plan  $P_1$  och  $P_2$  i  $\mathbb{R}^3$  ges av parameter form  $(2s + t, 3s - 2t, s)$  och  $(t, s, t - s)$ . Bestäm ekvationer som beskriver  $P_1$  och  $P_2$ . Beskriv snittet av  $P_1$  och  $P_2$  på parameter form.

5. **Uppgift.** Låt  $A = (1, 1)$ ,  $B = (2, 3)$  vara punkter och  $2x - y = 2$  en linje  $L$  i  $\mathbb{R}^2$ .
- (1) Hitta en punkt  $P$  på linjen  $L$  så att triangel  $ABP$  är vinkelrätt i  $P$ .
  - (2) Hitta en punkt  $P$  på linjen  $L$  att triangel  $ABP$  är vinkelrätt i  $A$ .
  - (3) Hitta en punkt  $P$  på linjen  $L$  att triangel  $ABP$  är vinkelrätt i  $B$ .

6. **Uppgift.** Betrakta följande plan i  $\mathbb{R}^3$   $P_1$  som ges av  $x + 2y + z = 1$ ,  $P_2$  som ges av  $2x - 3y + z = 2$ , och  $P_3$  som ges av  $4x + 5y - 2z = -1$ . Beskriva alla punkter på linjer som ges av snittet av  $P_1$  och  $P_2$ ,  $P_2$  och  $P_3$ ,  $P_1$  och  $P_3$ . Avgör om det finns en punkt som ligger på alla plan.

7. **Uppgift.** Betrakta två plan  $P_1$  och  $P_2$  i  $\mathbb{R}^3$  som ges av ekvationer:

$$P_1 : x - y + z = 2 \quad P_2 : 2x + 2z = 1$$

- (1) En linje  $(1, 1, 0) + t(2, 0, 3)$  speglas genom  $P_1$  till en linje  $L$ . Undersök om  $L$  skär planet  $P_2$ .

- (2) Bestäm alla vektorer i  $P_1$  som har längden 2 och är ortogonala till  $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

8. **Uppgift.** Låt  $L$  är en linje i  $\mathbb{R}^3$  som ges av:

$$x + y + z = 1$$

$$-x - y + z = 0$$

- (1) Hur många plan finns det i  $\mathbb{R}^3$  som innehåller  $L$  och punkten  $(-1, 0, 3)$ .
- (2) Bestäm en ekvation av något plan som innehåller  $L$  och punkten  $(-1, 0, 3)$ .
- (3) Bestäm all del rum i  $\mathbb{R}^3$  som innehåller  $L$ .
- (4) Bestäm en ekvation till planet som innehåller  $L$  och är ortogonal till planet  $2x - 3y + z = 1$ .

9. **Uppgift.** Triangelns hörn ges av  $(2, -1, 3)$ ,  $(-1, -2, -3)$  och  $(1, 3, 4)$ . Bestäm mittpunkterna på sidorna av triangeln.

10. **Uppgift.** Låt  $H$  vara ett plan i  $\mathbb{R}^3$  som innehåller punkten  $A = (1, 2, 3)$ . Låt  $L$  vara en linje i  $\mathbb{R}^3$  som innehåller punkten  $P = (2, 1, 2)$ . Antar att snittet av  $L$  och  $H$  är en punkt  $A$ .

- (1) Låt  $T$  vara linjen som man får när  $L$  reflekteras av planet  $H$ . Antar att  $T$  innehåller punkten  $Q = (3, 3, 1)$ . Bestäm normal vektor och ekvation av planet  $H$ .

- (2) Antar att  $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$  är normal vektor till  $H$ . Bestäm riktnings vektor till linjen som man får när  $L$  reflekteras av planet  $H$ .

## Lösningar av system av linjära ekvationer, Gauss-Jordan, determinanter.

11. **Uppgift.** Betrakta ett system av linjära ekvationer:

$$2x + y + z = b$$

$$2x + ay + 3z = 2$$

$$-x - y - z = 3$$

- (1) Skriv systemet som en matrisekvation  $A\vec{x} = \vec{v}$ .
- (2) Hitta värda av  $a$  och  $b$  så att systemet har inga lösningar.
- (3) Hitta värde av  $a$  och  $b$  så att systemet har precis en lösning.
- (4) Hitta värde av  $a$  och  $b$  så att systemet har oändlig många lösningar och hitta dem.
- (5) Bestäm detrerminananten till  $A$ .
- (6) För vilka  $a$  matrisen  $A$  är inverterbar

12. **Uppgift.**

- (1) Låt  $W = \text{span} \left( \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \right)$ . Bestäm ett ekvation system som har  $W$  för lösningsmängden.

- (2) Bestäm en matris  $A$  så att  $W = \ker(A)$ .

13. **Uppgift.** Betrakta ett plan  $P$  i  $\mathbb{R}^3$  som ges på parameter form  $\begin{bmatrix} 2t - s \\ t + s \\ -t - s \end{bmatrix}$ . Bestäm ett ekvation system som beskriver planet  $P$ .

14. **Uppgift.** Låt  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ . Bestäm en matris  $E$  så att matrisen  $EA$  bildas från  $A$  genom Gauss-Jordan operationerna (dessa operationer appliceras på  $A$ ): första raden multipliceras med 2, första raden multipliceras med  $-1$  och adderas till andra raden, första raden byter plats med tredje raden.

15. **Uppgift.** Betrakta följande systemet:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 0$$

- (1) Förklara varför lösningsmängden  $W$  till systemet är ett delrum i  $\mathbb{R}^4$ .
- (2) Bestäm en bas till lösningsmängden  $W$ .
- (3) Besteäm en linjär avbildning  $g: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^4$  så att  $\text{im}(g) = W$ .

4

- (4) Bestäm en linjär avbildning  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^6$  så att  $\ker(f) = W$ .
- (5) Bestäm en bas till ortogonala komplementet av  $W$ .

**Linjära avbildningar och matriser.**

16. **Uppgift.** Betrakta följande matris:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

- (1) Är det sant att vektor  $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$  ligger i  $\text{im}(A)$ ?
- (2) Bestäm  $\ker(A)$ .
- (3) Bevisa att linjen  $2x + 3y = 2$  avbildas till en linje  $L$  och inte en punkt. Hitta en ekvation som beskriver  $A(L)$ .
- (4) Bestäm om linjen  $3x - y = 5$  avbildas till en punkt eller en linje och beskriv detta.

17. **Uppgift.** Låt  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  vara en linjär avbildning så att:

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- (1) Förklara varför finns det bara en sådana linjär avbildning.
- (2) Bestäm matrisen till  $f$  och hitta  $f(x, y, z)$ .
- (3) Bestäm  $\text{im}(f)$ .
- (4) Bestäm en bas till bildrum  $\text{im}(f)$  och en bas till nollrum  $\ker(f)$ .

18. **Uppgift.** Låt  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  vara en linjär avbildning så att:

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- (1) Bestäm matrisen till  $f$  och hitta  $f(x, y)$ .
- (2) Är det sant att  $\text{im}(f) = \mathbb{R}^2$ .
- (3) Bestäm  $f(\Omega)$ , där  $\Omega$  är enhetskvadrat som spans av  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  och  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  (rita  $f(\Omega)$ ).

19. **Uppgift.** Låt  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  vara speglingen i linjen  $L_1$  som ges av  $2x - 2y = 0$  och  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  vara speglingen i linjen  $L_2$  som ges av  $3x + 2y = 0$ .

- (1) Hitta matrisen till  $f$ ,  $g$ ,  $fg$ , och  $gf$ .
- (2) Förklara hur parallelogrammet som spänns av  $(0, 0)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(1, 1)$  avbildas genom  $f$ .

20. **Uppgift.** Bestäm alla  $3 \times 3$  matriser  $A$  så att  $\text{im}(A) = \text{span} \left( \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] \right)$   
och  $\text{ker}(A) = \text{span} \left( \left[ \begin{array}{c} -1 \\ 2 \\ 0 \end{array} \right] \right)$

21. **Uppgift.**

(1) förklara varför lösningar till följande system är ett delrum i  $\mathbb{R}^4$

$$x_1 + x_2 = x_3$$

$$x_1 + x_3 = -x_2 + x_4$$

(2) Hitta en  $4 \times 4$  matris  $A$  vars bildrum är lösningar till systemet ovan.

22. **Uppgift.** Låt  $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  och  $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , och  $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

(1) Är det sant att vektorerna  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  är linjär oberoende?

(2) Bestäm en linjär avbildning  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  så att  $\text{ker}(f) = \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ .

23. **Uppgift.** Betrakta följande matris:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Bevisa att linjen  $2x + 3y = 2$  avbildas till en linje  $L$  och inte en punkt. Hitta en ekvation som beskriver  $L$ .

24. **Uppgift.**

(1) Bevisa att lösningen till följande systemet beskriver en linje  $L$  i  $\mathbb{R}^3$ :

$$2x - 2y + 3z = -1$$

$$2x + y + z = 1$$

(2) Betrakta följande matris:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Bevisa att linjen  $L$ , som definieras i (1) avbildas till en linje  $L_1$  och inte en punkt. Hitta en ekvation som beskriver  $L_1$ .

(3) Bestäm rangen till  $A$  och determinanten till  $A$ .

25. **Uppgift.** Betrakta följande matris:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- (1) Bestäm en bas till  $\ker(A)$ ,  $\operatorname{im}(A)$ , och  $\ker(A)^\perp$ .
- (2) Bestäm en vektor som inte ligger i  $\operatorname{im}(A)$ .

26. **Uppgift.** Låt:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (1) Undersök om  $\operatorname{im}(A)$  och  $\operatorname{im}(B)$  skär varandra och hitta alla vektorer i skärningen. Förklara varför skärningen är ett delrum i  $\mathbb{R}^3$  och beräkna sitt dimension.
- (2) Hitta en vektor i  $\operatorname{im}(A)$  som inte ligger i  $\operatorname{im}(B)$ .

27. **Uppgift.** Betrakta följande matris:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Bevisa att matrisen  $A$  uppfyller följande likheten:

$$A^3 - 3A^2 + 4A - 5 = 0$$

28. **Uppgift.** Låt  $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  ges som:

$$T \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} ax_1 - x_3 \\ x_2 + x_4 \\ x_3 - x_4 \\ bx_1 + x_2 + x_4 \end{bmatrix}$$

- (1) Bestäm alla  $a$  och  $b$  så att  $T$  blir inverterbar (du kan använda determinanten).
- (2) Bestäm den inversa avbildningen  $T^{-1}$  för  $a = b = 1$ .

**Linjär oberoende vektorer, baser, koordinater i olika baser.**

29. **Uppgift.** Bevisa att vektorer  $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$  och  $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$  är linjär beroende om och endast om  $u_1v_2 - v_1u_2 = 0$ .

30. **Uppgift.** Låt:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- (1) Förklara varför  $\mathcal{B} = \{\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}\}$  är en bas till  $\mathbb{R}^3$ .
- (2) Hitta koordinaterna av  $\vec{t}$  i basen  $\mathcal{B}$ .
- (3) Låt  $3x^2 - y^2 + xz - yz = 0$  vara en kurva i standarda koordinater. Bestäm ekvation för kurvan i koordinater  $a, b, c$  i basen  $\mathcal{B}$ .

31. **Uppgift.** Låt:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- (1) Bestäm en bas  $\beta$  till  $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ .
- (2) Bestäm en bas till  $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)^\perp$ .
- (3) Bestäm talet  $a$  så att vektorn:

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} a \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ligger i  $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ . Bestäm därefter koordinaterna för  $\vec{w}$  i basen  $\beta$ .

32. **Uppgift.** Låt  $W = \text{span}(\vec{v}, \vec{u})$ , där:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- (1) Förklara varför  $\mathcal{B} = \{\vec{v}, \vec{u}\}$  är en bas till  $W$ .
- (2) Låt  $\mathcal{C}$  vara en bas till  $W$  och  $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  vara en övergångsmatrisen från bas  $\mathcal{B}$  till bas  $\mathcal{C}$ . Bestäm vektorerna som ligger i  $\mathcal{C}$ .
- (3) Undersök om vektor  $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$  ligger i  $W$  och i så fall bestäm koordinaterna i bas  $\mathcal{B}$  och  $\mathcal{C}$ .



33. **Uppgift.** Låt  $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  och  $\mathcal{W} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$  vara två baser för ett delrum  $V$  i  $\mathbb{R}^{100}$ .

Antar att övergångsmatrisen från bas  $\mathcal{V}$  till bas  $\mathcal{W}$  ges av  $T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ .

(1) Bestäm övergångsmatrisen från bas  $\mathcal{W}$  till bas  $\mathcal{V}$

(2) Låt  $f: V \rightarrow V$  vara en linjär avbildning så att  $[f]_{\mathcal{W}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ . Bestäm  $[f]_{\mathcal{V}}$ .

34. **Uppgift.** Låt  $V$  vara ett delrum i  $\mathbb{R}^n$  och  $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  en bas till  $V$ . Antar att  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ , och  $\vec{z}$  är vektorer i  $V$  så att:

$$\vec{x} = 2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w} \quad \vec{y} = \vec{u} + \vec{v} \quad \vec{z} = -\vec{v} - \vec{w}$$

(1) Hitta koordinaterna av  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  och  $\vec{z}$  i bas  $\mathcal{B}$ .

(2) Förklara varför  $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$  är en bas till  $V$ .

(3) Hitta koordinaterna av  $\vec{v}$  i basen  $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ .

35. **Uppgift.** Låt  $L$  vara en linje i  $\mathbf{R}^2$  med rikningsvektor  $\vec{u}$  och normal vektor  $\vec{n}$ . Låt  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  vara speglingen i  $L$  och  $\text{proj}_L: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  vara ortogonal projektion på linjen  $L$ .

(1) Betrakta en bas  $\mathcal{V} = \{\vec{u}, \vec{n}\}$ . Bestäm matriser  $[f]_{\mathcal{V}}$  och  $[\text{proj}_L]_{\mathcal{V}}$ .

(2) Bestäm  $[f(\vec{w})]_{\mathcal{V}}$  och  $[\text{proj}_L(\vec{w})]_{\mathcal{V}}$  om  $\vec{w} = 2\vec{u} - 4\vec{n}$ .

36. **Uppgift.**

(1) Förklara varför följande vektorer bildar en bas i  $\mathbb{R}^2$ :

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(2) Låt  $\mathcal{B} = \{\vec{v}, \vec{w}\}$  och  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ . Bestäm  $[A]_{\mathcal{B}}$ .

(3) Låt  $\mathcal{B} = \{\vec{v}, \vec{w}\}$  och  $[A]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ . Bestäm  $A$ .

(4) Låt  $3x^2 - 2xy + 12y^2 = 2$  vara en kurva i standarda koordinater. Bestäm ekvation för kurvan i koordinater  $w$  och  $z$  i basen  $\mathcal{B}$ .

37. **Uppgift.** Låt:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) Bestäm en bas  $\mathcal{V} = \{\vec{v}, \vec{w}\}$  i  $\mathbb{R}^2$  så att  $[A]_{\mathcal{V}} = B$ .

(2) Bestäm  $[C]_{\mathcal{V}}$ .

38. **Uppgift.** Låt  $V$  vara delrum i  $\mathbb{R}^3$  som ges av  $2x - 2y + z = 0$ . Bestäm matrisrepresentation till ortogonala projektionen på  $V$  i någon bas.

**Eigenvärden och egenvektorer.**

39. Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (1) Bevisa att  $-2$  är en egenvärde till  $A$  och bestäm motsvarande egenvektorer.
- (2) Bestäm karakteristiska polynomet för  $A$ .

40. **Uppgift.** Låt  $V$  vara ett delrum i  $\mathbb{R}^n$ . Bestäm eigenvärden och egenvektorer till  $\text{proj}_V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

41. **Uppgift.** Låt  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  vara en linjär avbildning som har  $-1$ ,  $0$  och  $2$  för eigenvärden.

- (1) Bestäm eigenvärden till sammansättning  $f^2$ .
- (2) Kan  $f$  diagonaliseras?
- (3) Kan  $f^2$  diagonaliseras?

42. **Uppgift.** Låt  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  vara en linjär avbildning. Antar att  $f^{135} = 0$ . Bevisa att den enda eigenvärdet av  $f$  är  $0$ .

43. **Uppgift.** Låt  $\mathcal{P}_n$  vara mängden av alla polynomer  $p(x)$  av grad högst  $n$ . Genom följande kan vi identifiera  $\mathcal{P}_n$  med vektorrum  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mapsto \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Låt  $D: \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$  vara derivata, dvs,  $D(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = a_1 + \frac{a_2}{2}x + \cdots + \frac{a_n}{n}x^{n-1}$ .

- (1) Bevisa att polynomer  $1, x, x^2, \dots, x^n$  bildar en bas av  $\mathcal{P}_n$ . Den bas kallas för standardbasen till  $\mathcal{P}_n$ .
- (2) Bestäm standardmatrisen till  $D$  för  $n = 5$  och  $n = 10$ .
- (3) Bevisa att  $D: \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$  är linjär avbildning.
- (4) Bestäm eigenvärden till  $D$  och motsvarande egenvektorer.

44. **Uppgift.** Låt:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

- (1) Hitta eigenvärden och motsvarande egenvektorer till matriser  $A$  och  $2A$ .
- (2) Rita egenrummen till  $A$ .
- (3) Bestäm en  $2 \times 2$  matris  $S$  så att  $S^{-1}AS$  är diagonal matris.
- (4) Bestäm  $A^{139}$ .

45. **Uppgift.** Låt  $A$  vara  $n \times n$  matris så att  $\det(A) = 0$ .

- (1) Förklara varför  $A$  har en egenvektor.  
 (2) Förklara varför det finns en bas  $\mathcal{B}$  i  $\mathbb{R}^n$ , så att matrisen  $[A]_{\mathcal{B}}$  har noll vektor som första kolonnen.

46. **Uppgift.** Låt  $A$  vara  $4 \times 4$  symmetrisk matris som har följande vektorer som egenvektorer:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Förklara varför egenvärdet till  $\vec{v}$  är lika med egenvärdet till  $\vec{u}$ .

47. **Uppgift.** Hitta alla värde av  $a$  så att följande matris är inte diagonaliserbar:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix}$$

48. **Uppgift.** Låt  $A$  vara  $n \times n$  matris. Antar att för varje vektor  $v$ ,  $|A(v)| = |v|$  ( $A$  bevarar längden). Visa att 1 och  $-1$  är de enda möjliga egenvärdena till  $A$ .

49. **Uppgift.**

- (1) Bevisa att  $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$  är en bas till  $\mathbb{R}^2$ .  
 (2) Låt  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  en linjär avbildning som i bas  $\beta$  representaras av matrisen:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Bestäm  $T^n \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right)$  för alla heltal  $n > 0$ .

50. **Uppgift.** Låt  $\lambda$  vara ett nollskilt egenvärde till en kvadratisk, inverterbar matris  $A$ . Visa att  $\lambda^{-1}$  är egenvärde till  $A^{-1}$ .

**Orthogonalitet, symmetriska matriser, Gram-Schmidt process.**

51. **Uppgift.** Betrakta delrum  $V$  i  $\mathbb{R}^3$  som ges av ekvationen:

$$2x + 3y - z = 0$$

Bestäm en ON bas till  $V$ . Bestäm en matrisrepresentation till  $\text{proj}_V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

52. **Uppgift.** Bevisa att följande vektorer är ortogonala:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Utvidga  $\{\vec{v}, \vec{w}\}$  till en ortogonal bas för  $\mathbb{R}^3$ .

53. **Uppgift.** Låt:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) Hitta orthonormal bas till  $\ker(A)$  och  $\text{im}(A)$ .

(2) Bevisa att  $\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  ligger i  $\ker(A)$  och beräkna koordinater av  $\vec{v}$  anavseende på basen från (1).

(3) Bestäm standard matris till  $\text{proj}_{\ker(A)}: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ .

(4) Bestäm  $\text{proj}_{\ker(A)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

54. **Uppgift.** Låt:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bestäm en orthonormal bas till  $\text{span}(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ .

55. **Uppgift.** Låt  $A$  vara  $n \times n$  matris. Antar att  $n$  är ett ojämnt tal. Visa att  $A$  har en egenvektor.

56. **Uppgift.** Låt  $\vec{v}$  vara en vektor i  $\mathbb{R}^{100}$ . Betrakta matrisen  $A = \vec{v}\vec{v}^T$ . Bevisa att  $A$  kan ortogonalt diagonaliseras.

57. **Uppgift.** Bestäm alla symmetriska  $4 \times 4$  matriser  $A$  så att  $\dim(\ker(A)) = 3$  och

som har  $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  för egenvektor med egenvärdet  $-1$ .

58. **Uppgift.** Betrakta fljande matris:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

som har 3 och 6 för egenvärdena. Bestäm en ortonormal bas av egenvektorer till  $A$ .

59. **Uppgift.**

Låt  $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ , och  $\vec{w}_4$  vara ortonormala vektorer i  $\mathbb{R}^4$ .

(1) Beräkna absolut värde av följande determinanten:

$$\det [\vec{w}_1 \quad \vec{w}_2 \quad \vec{w}_3 \quad \vec{w}_4]$$

(2) Beräkna absolut värde av följande determinanten:

$$\det [\vec{w}_1 - \vec{w}_2 \quad \vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \vec{w}_3 \quad \vec{w}_3 - \vec{w}_4 \quad \vec{w}_4]$$

**Minstakvadratmetoden.**

60. **Uppgift.** Anpassa kurvan  $y = ax + b$  med minstakvadratmetoden till följande tabell av mätdata

x	-40	-20	20	40
y	1	2	6	8

61. **Uppgift.** Anpassa kurvan  $y = ax^2 + bx + c$  med minstakvadratmetoden till följande tabell av mätdata

x	-2	-1	0	1	2
y	3	2	0	2	8