24 november, 2015, Föreläsning 19

Tillämpad linjär algebra

Innehåll:

- Basbyten och linjära transformationer
- Projektionssatsen

Linjära transformationer i annan bas än standardbasen

1. **Definition.** Låt $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n\}$ vara en bas i $\mathbb{R}^n$ och $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning. Följande matris

$$[f]_{\mathcal{B}} = [[f(\vec{v}_1)]_{\mathcal{B}}\,[f(\vec{v}_2)]_{\mathcal{B}} \cdots [f\vec{v}_n)]_{\mathcal{B}}]$$

kallas för **matrisen för avbildningen f med avseende på basen $\mathcal{B}$**.

2. **Proposition** Låt $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n\}$ vara en bas i $\mathbb{R}^n$ och $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning. Då gäller följande

- För varje vektor $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^n$ kan man skriva upp följande likhet
$$[f(\vec{v})]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$$
- Matrisen $[f]_{\mathcal{B}}$ är den enda matrisen med denna egenskap.

Se teorem 8.1.1 i Anton. Notera att man i teoremet betecknar matrisen $[f]_{\mathcal{B}}$ med A samt att boken även använder beteckningen $[T]_{\mathcal{B}}$, se sidan 445.

Basbyten

Två matriser som representerar samma linjära avbildning men i två olika baser har en algebraisk relation. (Jämför relationen mellan koordinaterna för en vektor representerad i två olika baser, se F18).

3. **Proposition** Låt $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n\}$ och $\mathcal{B}_2 = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots \vec{w}_n\}$ vara två baser i $\mathbb{R}^n$. Om $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är en linjär avbildning då är $[f]_{\mathcal{B}_1}$ och $[f]_{\mathcal{B}_2}$ relaterade enligt

$$[f]_{\mathcal{B}_2} = P[f]_{\mathcal{B}_1}P^{-1}$$

där $P = P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ är basbytesmatrisen från $\mathcal{B}_1$ till $\mathcal{B}_2$ och ges av (se F18),

$$P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \left[[\vec{v}_1]_{\mathcal{B}_2}\,[\vec{v}_2]_{\mathcal{B}_2} \cdots [\vec{v}_n]_{\mathcal{B}_2}\right].$$

Se även teorem 8.1.2 i Anton.

Notera att

- P är alltid inverterbar.
- $[f]_{\mathcal{B}_1} = P^{-1}[f]_{\mathcal{B}_2}P$

4. Uppgift.

Låt $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ vara en bas i $\mathbb{R}^2$ där $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ och $u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning som ges av

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x - y \\ 3y \end{bmatrix}$$

a) Bestäm standardmatrisen till avbildningen f.

b) Bestäm matrisen för avbildningen f med avseende på basen $\mathcal{B}$, $[f]_{\mathcal{B}}$.

5. Uppgift.

Låt $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ och $\mathcal{B}_2 = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ vara två baser i $\mathbb{R}^2$ där

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{och} \quad w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Låt $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning sådan att $[f]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Bestäm f och $[f]_{\mathcal{B}2}$.

6. Uppgift. (Tenta 12/3-12 Tal 6, B-delen)

Låt $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som ges av matrisen

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Låt $\mathcal{B}$ vara basen som ges av vektorerna

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{och} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

a) Bestäm matrisen för avbildningen T med avseende på basen $\mathcal{B}$.

b) Bestäm koordinatvektorn $[T(\vec{x})]_{\mathcal{B}}$ om $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

7. Projektionssatsen - ortogonal projektion på generella underrum

Om W är ett underrum till $\mathbb{R}^n$, då kan varje vektor $\vec{x}$ i $\mathbb{R}^n$ skrivas (på exakt ett sätt) som $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ där $\vec{x}_1$ ligger i W och $\vec{x}_2$ ligger i $W^{\perp}$.

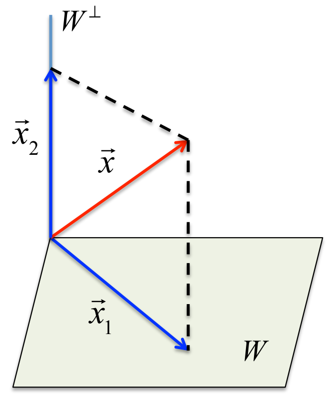
Vektorn $\vec{x}_1 = \text{proj}_W \vec{x}$ och $\vec{x}_2 = \vec{x} - \vec{x}_1 = \text{proj}_{W^\perp} \vec{x}$, se Figur 3.

8. **Hur beräknar vi projektionen av $\vec{x}$ på W?**

Om W är ett underrum till $\mathbb{R}^n$ och matrisen M är en matris vars kolonnvektorer är en bas för W då är

$$\text{proj}_W \vec{x} = M(M^T M)^{-1} M^T \vec{x}$$

för alla kolonnvektorer $\vec{x}$ i $\mathbb{R}^n$.



FIGUR 1. Vektorn $\vec{x}$ i $\mathbb{R}^n$ delas upp i två komponenter med hjälp av ortogonal projektion.

9. **Uppgift.** Hitta den ortogonala projektionen av vektorn $\vec{x} = (1,\ 0,\ 4)$ på planet, W, som ges av ekvationen $x - 4y + 2z = 0$.