KTH ROYAL INSTITUTE
OF TECHNOLOGY

# EL1000/1110 Reglerteknik AK

Föreläsning 8:
Styrbarhet och observerbarhet

# Dagens program

- Tillståndsmodeller (repetition)
  - Linjärisering
  - $G(s) \leftrightarrow$ tillståndsmodell
  - Poler från tillståndsmodell (tavlan)
- Lösning av tillståndsekvation (tavlan)
- Styrbarhet och observerbarhet (tavlan)

# Tillståndsmodeller

- Linjär tillståndsbeskrivning

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- Vektorn $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ kallas systemets tillstånd

- $x(0)$ innehåller precis den information som behövs för att räkna ut $y(t), t > 0$, givet $u(t), t > 0$. (Se lösning av tillståndsekvation idag.)

# Linjärisering

Givet olinjär modell $\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = h(x,u) \end{cases}$

1. Finn stationär punkt $(x_0, u_0)$:

$$\dot{x}_0 = 0 = f(x_0, u_0)$$

2. För små avvikelser $\Delta x, \Delta u$ från stationär punkt gäller Taylorutvecklingen

$$\frac{d}{dt}\Delta x = \underbrace{f_x(x_0,u_0)}_{A}\Delta x + \underbrace{f_u(x_0,u_0)}_{B}\Delta u$$

3. Motsvaranade approximation för $y$

$$\Delta y = \underbrace{h_x(x_0,u_0)}_{C}\Delta x + \underbrace{h_u(x_0,u_0)}_{D}\Delta u$$

# $\boldsymbol{G(s)} \leftrightarrow$ Tillståndsbeskrivning

- $G(s)$ →Tillståndsbeskrivning
  - Metod 1: $x_1 = y, x_2 = \dot{y}, \dots, x_n = y^{(n-1)}$
  - Metod 2: Diagonalform
  - Metod 3: Observerbar kanonisk form
  - Metod 4: Styrbar kanonisk form

- Tillståndsbeskrivning → $G(s)$
  - $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$

# Fördelar med tillståndsmodeller

- Naturligt vid modellbygge, tillstånd har ofta fysikalisk betydelse
- Ger fullständig förklaring till pol-nollställeförkortningar och intern stabilitet
- Lämpligt vid datorsimulering och optimering
- Återkoppling med flera mätsignaler på systematiskt sätt
- System med flera in- och utsignaler behandlas på samma sätt

# Dagens program

- Tillståndsmodeller (repetition)
  - Linjärisering
  - $G(s) \leftrightarrow$ tillståndsmodell
  - **Poler från tillståndsmodell (tavlan)**
- Lösning av tillståndsekvation (tavlan)
- Styrbarhet och observerbarhet (tavlan)

# Quiz

(1) Betrakta differentialekvationen

$$\ddot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

Vilken tillståndsbeskrivning motsvarar den?

a) $\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

# Quiz

(2) Om

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

vad är då $e^{At}$?

a)

$$\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & -2e^t \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^{-2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t^2} \end{pmatrix}$$

# Quiz

(3) Vilken styrbarhetsmatris motsvarar **inte** ett styrbart system?

a) $\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

---

(4) Vad krävs av konstanten $a$ i $\mathcal{O}$ för att systemet ska vara observerbart?

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$$

a) $a = 0$ b) $a \neq 0$
c) $a < 0$ d) $a > 0$