KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till kompletteringstentamen 2015-11-26

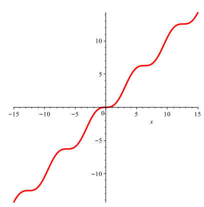
1. Betrakta funktionen f som ges av $f(x) = x - \sin x$. Skissa grafen $y = f(x)$ med hjälp av (bland annat) en undersökning av derivatan.

Lösning. Definitionsmängden för f är hela $\mathbb{R}$. Funktionen är elementär och alltså kontinuerlig. Vi deriverar:

$f'(x) = 1 - \cos x$, som existerar för alla x. Vi ser att $f'(x) = 0 \iff x = n2\pi$, n heltal, och att $f'(x) > 0$ för alla andra x. Det följer att f är strängt växande på hela $\mathbb{R}$, med terasspunkter i alla punkter som är heltalsmultipler av 2π. Gränsvärden:

$$\lim_{x\to\infty}(x - \sin x) = \infty \qquad \text{och} \qquad \lim_{x\to-\infty}(x - \sin x) = -\infty$$

Nu kan vi skissa kurvan:



$\square$

Svar: Se lösningen.

2. A. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{x^2}$.

   B. Avgör om funktionen $f(x) = 1 + \arctan 2x$ är inverterbar och bestäm inversen om den finns.

   Lösning. A. Med Taylorutveckling fås:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3) - x - 1}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} (\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x)) \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(Gränsvärdet kan förstås också beräknas med L'Hospitals regel)

B. Definitionsmängden är $\mathbb{R}$ och värdemängden är $(1 - \pi/2, 1 + \pi/2)$. Vi har $f'(x) = \frac{2}{1+4x^2}$ som är positivt för alla x, så funktionen är strängt växande. Det följer att den är inverterbar.

Inversens värdemängd blir $\mathbb{R}$ och inversens definitionsmängd $(1 - \pi/2, 1 + \pi/2)$. Vi beräknar inversen. Följande ekvivalenser gäller för $y \in$(1-$\pi/2, 1 + \pi/2)$:

$$\begin{aligned}y = 1 + \arctan 2x &\iff y - 1 = \arctan 2x \\ &\iff \tan(y-1) = 2x \\ &\iff \frac{\tan(y-1)}{2} = x.\end{aligned}$$

Inversen ges alltså av

$$f^{-1}(y) = \frac{\tan(y-1)}{2}$$

där y ligger mellan $1 - \pi/2$ och $1 + \pi/2$. □

Svar: A. $1/2$. B. Ja, $f^{-1}(y) = \frac{\tan(y-1)}{2}$, där $1 - \pi/2 < y < 1 + \pi/2$

3. Approximera integralen $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx$ med hjälp av ...

A. ... en Riemannsumma med två delintervall.

B. ... att ersätta integranden med ett Taylorpolynom av grad 2.

Lösning. Integranden har gränsvärde 1 när $x \to 0$ så om vi sätter funktionsvärdet till 1 i den punkten så blir integranden kontinuerlig och integralen existerar säkert.

A. Dela integrationsintervallet i två lika stora delar och välj i varje delintervall den högra ändpunkten att ta funktionsvärde i. Då kan vi approximera integralen med en Riemannsumma enligt:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx \approx \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \approx 1.21$$

B. Med Taylorutveckling får vi att $\frac{\sin x}{x} \approx 1 - \frac{x^2}{6}$ så

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx \approx \int_0^{\pi/2} (1 - \frac{x^2}{6})\,dx = \left[x - \frac{x^3}{18}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{144} \approx 1.36.$$

$\square$

Svar: A, B. Se lösningen. (Integralens riktiga värde är ungefär 1.37)