2 och 8 december, 2015, Föreläsning 22 och 23

Tillämpad linjär algebra

Innehåll:

- Repetition av egenvärden och egenvektorer
- Diagonalisering
- Symmetriska matrisen

1. **Egenvärden - en kort repetition**

Följande känner vi igen från tidigare. Låt A vara $n \times n$-matris och låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning.

- En vektor $\vec{v} \neq 0$ i $\mathbb{R}^n$ kallas för en egenvektor till A med egenvärde λ om $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ dvs om $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$.
- En vektor $\vec{v} \neq 0$ i $\mathbb{R}^n$ kallas för en egenvektor till f med egenvärde λ om $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$.
- Egenvärdena till A ges som lösningen till den karakteristiska ekvationen (karakteristiska polynomet)
$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$
- Om $\det(A - \lambda I_n) = (x - \lambda)^k g(x)$ och $g(\lambda) = 0$ så kallas k för egenvärdet λs **algebraiska multiplicitet** (säger hur många gånger egenvärdet "repeteras").
- Låt λ vara ett egenvärde till A. **Egenrummet** till A som motsvarar egenvärdet λ betecknas med E_λ och ges av det nollskilda lösningsrummet till
$$(A - \lambda I_n)\vec{v} = \vec{0}$$
- Notera att $E_\lambda = \ker(A - \lambda I_n)$.
- $\dim(E_\lambda) = \dim(\ker(A - \lambda I_n))$ kallas för den **geometriska multipliciteten** och motsvarar det största antalet linjärt oberoende egenvektorer för egenvärdet λ.
- Om $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ är egenvektorer till A som motsvarar olika egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ då är egenvektorerna $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ linjärt oberoende.

2. **Uppgift.** Tentamen 28/10-13, uppgift 3

Avbildningen $T \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ges av matrisen
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Bestäm egenvärden och egenvektorer till T.

b) Rita upp egenrummen till T.

c) Bestäm två linjärt oberoende egenvektorer till T.

d) Bestäm matrisrepresentationen av T med avseende på en bas av egenvektorer.

Diagonalisering

3**. Exempel.**

Vi har tidigare sagt att vissa problem kan förenklas genom ett smart val av en bas. Hur man väljer bas beror på vad man vill studera. Antag att matrisen A är given

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

och vi vill beräkna A^{100}. Hur? Om vi skriver upp $A^1, A^2, A^3 \dots$ så är det inte så enkelt att se ett mönster. Om vi däremot byter bas från standardbasen till basen $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ där

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{och} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

kan skriva matrisen A i den nya basen som $[A]_\mathcal{B} = S^{-1}AS$ om $S = P_{\mathcal{B}\to S}$ är basbytesmatrisen från $\mathcal{B}$ till standardbasen (kolonnerna i S ges av basvektorerna till $\mathcal{B}$). Vi får

$$[A]_\mathcal{B} = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Notera att det är enkelt att beräkna $[A]_\mathcal{B}^{100}$ eftersom det är en diagonalmatris. Notera även att A^{100} kan skrivas som

$$(S[A]_\mathcal{B}S^{-1})^{100} = S[A]_\mathcal{B}\underbrace{S^{-1}S}_{I_2}[A]_\mathcal{B}S^{-1} \cdots S[A]_\mathcal{B}S^{-1} = S[A]_\mathcal{B}^{100}S^{-1} = S \begin{bmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & -1^{100} \end{bmatrix} S^{-1}.$$

4**. Proposition.** Om $\vec{v}$ är en egenvektor till A med egenvärde λ, då är även $\vec{v}$ en egenvektor till A^n med egenvärdet λ^n.

5. **Definition.** En $n \times n$-matris A kallas för **diagonaliserbar** om det finns en bas $\mathcal{B}$ sådan att $[A]_\mathcal{B}$ är en diagonalmatris. Vi säger att diagonalmatrisen $[A]_\mathcal{B}$ diagonaliserar A (alternativt säger vi att basen $\mathcal{B}$ diagonaliserar A).

6**. Proposition.** Följande är ekvivalent

(1) A är diagonaliserbar.
(2) Det finns en inverterbar matris S sådan att $S^{-1}AS$ är en diagonalmatris. (vi säger att S diagonalizerar A).

7. **Proposition.** Om S är en $n \times n$ matris sådan att

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

då är kolonnerna i S egenvektorerna till A som motsvarar egenvärdena $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

8. **Proposition.**

- En $n \times n$-matris A är diagonaliserbar om och endast om A har n linjärt oberoende egenvektorer (egenvektorerna utgör en bas för $\mathbb{R}^n$).
- En $n \times n$-matris A med n distinkta egenvärden är diagonaliserbar. (Notera att det är möjligt att diagonalisera en $n \times n$-matris A som inte har n distinkta egenvärden.)

9. **Diagonalisering i steg**

(1) Beräkna egenvärdena.
(2) Beräkna en bas för varje egenrum motsvarande varje egenvärde.
(3) Låt basvektorerna för alla egenrum utgöra kolonnerna i en matris S (den diagonaliserande matrisen).
(4) Bilda diagonalmatrisen $S^{-1}AS$ där diagonalelementen är egenvärdena till A.

10. **Uppgift.** Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Bestäm egenvärden och motsvarande egenvektorer till A.
b) Är A diagonaliserbar? I sådant fall, diagonalisera A och beräkna A^{111}.

11. **Uppgift.** Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Bestäm egenvärden och motsvarande egenvektorer till A.
b) Är A diagonaliserbar? I sådant fall, diagonalisera A och beräkna A^{111}.

12. **Uppgift.** Tenta 29/1914, uppgift 4, B-delen

En linjär avbildning $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ har egenvärdena $\lambda = 0, 1, 2$ och 4. Låt A vara avbildningens standardmatris.

a) Är A diagonaliserbar?
b) Vilken dimension har bildrummet $\mathrm{im}(T)$?
c) Bestäm det karakteristiska polynomet till A.

Diagonalisering av symmetriska matriser

13. **Proposition.** Låt A vara $n \times n$-matris. Följande är ekvivalent

- A är symmetrisk ($A = A^T$).
- Det finns en ortonormal bas som består av egenvektorer.
- Det finns en ortogonal matris S sådan att $S^T AS$ är en diagonalmatris med egenvärdena till A på diagonalen.

14. **Proposition.**

- En symmetrisk matris A kan alltid diagonaliseras.
- En symmetrisk matris egenvektorer från olika egenrum (motsvarar olika egenvärden) är ortogonala mot varandra.

15. **Ortogonal diagonalisering i steg**

(1) Beräkna egenvärdena
(2) Beräkna en bas för varje egenrum
(3) Använd Gram-Schmidt för att göra om varje egenrumsbas till en ortonormal bas.
(4) Låt basvektorerna för alla egenrum utgöra kolonnerna i en matris S (den diagonaliserande matrisen).
(5) Bilda diagonalmatrisen $S^T AS$ där diagonalelementen är egenvärdena till A.

16. **Uppgift.** Låt

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Kan A diagonalizeras?
b) Hitta en bas som består av egenvektorerna till A.
c) Hitta en ortonormal bas som består av egenvektorerna till A.
d) Beräkna A^{100}.

17. **Uppgift.** Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \end{bmatrix}$$

a) Kan A diagonalizeras?
b) Hitta en bas som består av egenvektorerna till A.
c) Hitta en ortonormal bas som består av egenvektorerna till A.
d) Beräkna A^{100}.

18. **Uppgift.** Tenta 12/6-12, uppgift 5, B-delen

Låt $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara avbildningen som ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 \\ -1 & 7 & 2 \\ 7 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Det finns nollskilda vektorer sådana att

$$T(\vec{u}) = -7\vec{u} \quad \text{och} \quad T(\vec{v}) = 7\vec{v}$$

a) Bestäm alla sådana vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$.
b) Bestäm en ortogonal bas för $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer till T.