1 december, 2015, Föreläsning 21

Tillämpad linjär algebra

Innehåll:

- Ortonormala baser (ON-baser)
- Gram-Schmidt's ortogonaliseringsprocess

Minsta-kvadratmetoden - exempel som löses på föreläsningen

1. **Uppgift.** Tentamen 19/1-15, uppgift 3

Anpassa kurvan $y = ax^2 + bx + c$ med minsta kvadratmetoden till följande tabell av data

x	-1	0	1	2
y	2	0	2	4

Ortogonala/ortonormala vektorer och matriser

Låt $\vec{u}$ och $\vec{v}$ vara två vektorer i $\mathbb{R}^n$. Vad innebär det att vektorerna är

- Ortogonala?
- Ortonormala?

Kan en ortogonal mängd av nollskilda vektorer i $\mathbb{R}^n$ vara linjärt beroende?

2. **Definition.** En linjär avbildning $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kallas för ortogonal om $||f(\vec{v})|| = ||\vec{v}||$ för alla $\vec{v}$ (den bevarar längden).

3. **Proposition.** Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning och A vara matrisen till f. Följande är ekvivalent

- f är ortogonal.
- Kolonnerna i A bildar en ortonormal bas för $\mathbb{R}^n$.
- Raderna a A bildar en orthonormal bas för $\mathbb{R}^n$.
- A är inverterbar och $A^{-1} = A^T$

För en $n \times n$-matris A gäller

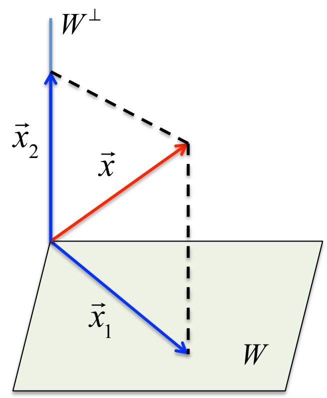
- A är ortogonal om kolonnerna är ortonormala, dvs, har längden 1 och är vinkelräta mot varadra.
- A är ortogonal om och endast om den är inverterbar och $A^{-1} = A^T$.

4. Projektion på delrum med ortonormal bas

Om W är ett nollskilt delrum till $\mathbb{R}^n$ och $\vec{x}$ är en vektor i $\mathbb{R}^n$ då ges den ortogonala projektionen av $\vec{x}$ på W av

$$\text{proj}_W \vec{x} = \underbrace{A(A^TA)^{-1}A^T}_{P}\vec{x}$$

(se sid 384, Teorem 7.7.5 i Anton) där A är en matris vars kolonner bildar en bas för W.(Jämför härledningen av normalekvationen i minsta kvadratmetoden med $\vec{x} = \vec{b}$, F20.) Matrisen P är standardmatrisen för ortogonal projektion av $\mathbb{R}^n$ på W.



Om kolonnvektorerna i A är ortonormala är $A^TA = I$ och ortogonala projektionen av $\vec{x}$ på W kan skrivas som

$$\text{proj}_W \vec{x} = AA^T\vec{x} = P\vec{x}.$$

P är standardmatrisen för ortogonal projektion av $\mathbb{R}^n$ på W som är ett delrum med en ortonormal bas.

5. Ortogonal projektion på ON-baser

Om $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_k\}$ är en bas för W i $\mathbb{R}^n$ och $\vec{x}$ i $\mathbb{R}^n$ då gäller följande:

a) Om $\mathcal{B}$ är en ORTONORMAL bas så är

$$\text{proj}_W \vec{x} = (\vec{x}\cdot\vec{v}_1)\vec{v}_1 + (\vec{x}\cdot\vec{v}_2)\vec{v}_2 + \cdots + (\vec{x}\cdot\vec{v}_k)\vec{v}_k \tag{1}$$

b) Om $\mathcal{B}$ är en ORTOGONAL bas så är

$$\text{proj}_W \vec{x} = \frac{\vec{x}\cdot\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2}\vec{v}_1 + \frac{\vec{x}\cdot\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2}\vec{v}_2 + \cdots + \frac{\vec{x}\cdot\vec{v}_k}{\|\vec{v}_k\|^2}\vec{v}_k \tag{2}$$

6. **Uppgift.** Olika sätt att beräkna ortogonal projektion.

En bas för planet W i $\mathbb{R}^3$ är given av $\vec{v}_1 = (0, 1, -1)$ och $\vec{v}_2 = (1, 2, 2)$.

a) Hur ser vi att det är en bas?
b) Är det en ortogonal bas?
c) Beräkna den ortogonala projektionen av $\vec{x} = (-5, 3, 1)$ på W med hjälp av formel (2).
d) Normalisera basvektorerna.
e) Beräkna den ortogonala projektionen av $\vec{x} = (-5, 3, 1)$ på Wmed hjälp av formel (1).
f) Låt nu de normaliserade basvektorerna utgör kolonnerna i matrisen A. Beräkna $A^T A$ samt AA^T.
g) Beräkna den ortogonala projektionen av $\vec{x} = (-5, 3, 1)$ på W genom att använda standardmatrisen för den ortogonala projektionen, AA^T.

Ortonormala baser (ON-baser)

7. **Alla nollskilda delrum till $\mathbb{R}^n$ har en ortogonal bas.**

8. **Gram-Schmidt's process** för att skapa en ortogonal bas:

Låt W vara ett underrum till $\mathbb{R}^n$ och låt $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots \vec{w}_k\}$ vara en bas för W. Följande steg kommer att producera en ortogonal bas, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_k\}$, för W.

Steg 1: Låt $\vec{v}_1 = \vec{w}_1$.

Steg 2: Hitta en vektor $\vec{v}_2$ som är ortogonal mot $\vec{v}_1$. Vektorn $\vec{v}_2$ är ortogonal mot $\vec{v}_1$ om $\vec{v}_2$ väljs som

$$\vec{v}_2 = \vec{w}_2 - \text{proj}_{W_1}\vec{w}_2 = \vec{w}_2 - \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2}\vec{v}_1$$

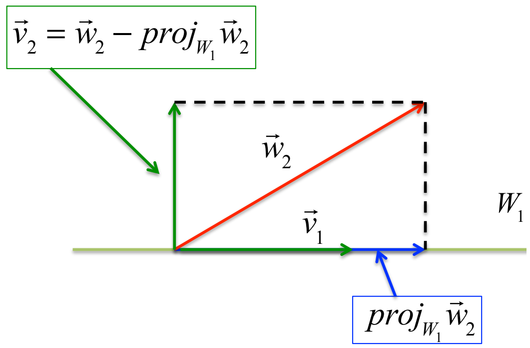
där W_1 är det delrum som spänns upp av $\vec{v}_1$, se Figur 1.

Steg 3: Hitta en vektor $\vec{v}_3$ som är ortogonal mot $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$. Vektorn $\vec{v}_3$ är ortogonal mot $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ om $\vec{v}_3$ väljs som

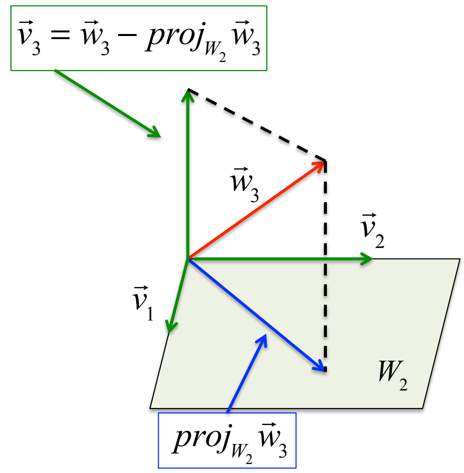
$$\vec{v}_3 = \vec{w}_3 - \text{proj}_{W_2}\vec{w}_3 = \vec{w}_3 - \frac{\vec{w}_3 \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2}\vec{v}_1 - \frac{\vec{w}_3 \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2}\vec{v}_2$$

där W_2 är det delrum som spänns upp av $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$, se Figur 2.

Steg 4-k: Fortsätt som ovan för att producera den fullständiga ortogonala basen $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_k\}$ till W.



Figur 1. Vektorn $\vec{v}_2$ konstrueras så att den är ortogonal mot $\vec{v}_1$. W_1 är delrummet som spänns upp av $\vec{v}_1$.



Figur 2. Vektorn $\vec{v}_3$ konstrueras så att den är ortogonal mot $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$. W_2 är delrummet som spänns upp av $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$.

9. **Alla nollskilda delrum till $\mathbb{R}^n$ har en ortonormal bas.**

Om vi föredrar en ortonormal bas kan vi normalisera den ortogonala basen, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_k\}$, vilket ger oss en ortonormal bas, $\{\vec{q}_1 = \vec{v}_1/\|\vec{v}_1\|, \vec{q}_2 = \vec{v}_2/\|\vec{v}_2\|, \ldots \vec{q}_k = \vec{v}_k/\|\vec{v}_k\|\}$.

10. **Om W ett delrum till $\mathbb{R}^n$ då kan varje ortogonal/ortonormal mängd av vektorer i W utökas till en ortogonal/ortonormal bas för W.**

11. **Uppgift.** Gram-Schmidt's process.

Följande bas är given $\vec{w}_1 = (1, 2)$ och $\vec{w}_2 = (-1, 3)$. Konstruera en ON-bas $\vec{q}_1$ och $\vec{q}_2$.

Svar: $\vec{q}_1 = 1/\sqrt{5}(1, 2),\ \vec{q}_2 = 1/\sqrt{5}(-2, 1)$

12. **Uppgift.** Tenta 19/1-15, tal 4 (B-delen)

Planet H ges av ekvationen $3x - 5y + 3z = 0$.

a) Bestäm en ortonormal (ON) bas β för H.

b) Utvidga β till en ON-bas för $\mathbb{R}^3$.

c) Låt $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara ortogonala projektionen på H. Bestäm en matrisrepresentation för T.

13. **Uppgift.** Tentatal SF1624: Låt $W = \mathrm{im}(A)$ vara bildrummet (kolonnrummet) till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & -4 & 1 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & 0 & -4 & -4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en ortonormal bas för W.

Svar: $\vec{q}_1 = 1/\sqrt{10}(-1, -1, 2, 2)$, $\vec{q}_2 = 1/\sqrt{590}(9, 19, 12, 2)$