Föreläsning 9

1 Potenitallösningen för strömningen kring en cylinder

I denna föreläsning ska vi kortfattat behandla potentialströmning, som traditionellt varit ett stort område inom aerodynamiken, men numer är av mer undanskymd betydelse. Vi börjar med att härleda den klassiska potentiallösningen

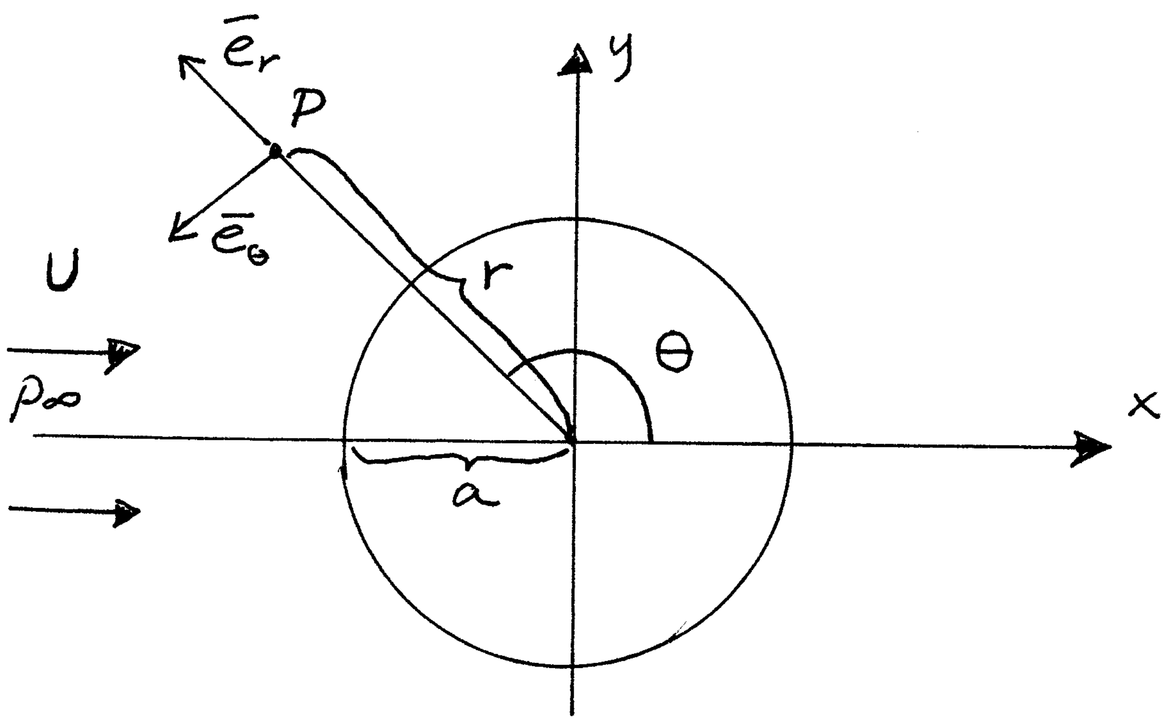

Figure 1: Vi löser Laplace-ekvationen för den rotationsfria strömningen kring en cylinder. Randvillkoret på cylinder är att den radiella hastighetskomponenten u_r är noll på cylindern.

för inviskös, inkompressibel och rotationsfri strömning kring en cylinder. Att strömningen är rotationsfri innebär att det existerar en hastighetspotential, ϕ, sådan att hastighetsfältet kan skrivas

$$\mathbf{u} = \nabla\phi \,. \tag{1}$$

Att strömningen är inkomporessibel innebär att $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, vilket ger Laplace-ekvationen

$$\nabla^2\phi = 0 \,. \tag{2}$$

Vi ska nu lösa Laplace-ekvationen för den strömning som uppkommer kring en cylinder med en konstant friström U. Cylinderns radie är a och vi låter friströms-hastigheten vara parallell med x-axeln. Då potentialen är given kan den radiella och azimutala hastighetskomponenten räknas ut som

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}\,, \quad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\,. \tag{3}$$

I cylinderkoordinater kan Laplace-ekvationen (1) skrivas

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 \theta} = 0\,. \tag{4}$$

Randvillkoren är

$$u_r = 0 \text{ då } r = a \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \text{ då } r = a\,, \tag{5}$$

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \phi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta \to U\mathbf{e}_x \text{ då } r \to \infty\,. \tag{6}$$

För att erhålla en entydig lösning till detta problem så måste vi också kräva att $|r\mathbf{u}| \to \mathbf{0}$ as $r \to \infty$. Mer om detta villkor lite senare. Observera att det inte är vidhäfningsvillkoret vi använder i denna analys. Eftersom vi antar att fluiden är inviskös så är den fri att glida längs cylindern och följaktligen så kräver vi inte att $u_\theta = 0$ då $r = a$. Som vi ska se så kommer u_θ inte att vara noll på cylindern. Vi ansätter nu en separabel lösning

$$\phi(r, \theta) = g(\theta) f(r)\,, \tag{7}$$

och tillåter oss att gissa oss till formen på $g(\theta)$. Om vi gissar att $g(\theta) = \cos\theta$ eller $g(\theta) = \sin\theta$ så ser vi att det är bara med $\cos\theta$ som vi har möjlighet att uppfylla randvillkoret (6) i oändligheten, eftersom vi måste ha att

$$u_r = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} g(\theta) \to -U \text{ då } r \to \infty \text{ och } \theta = \pi\,. \tag{8}$$

Alltså gör vi ansatsen $\phi = \cos\theta f(r)$ och sätter in i ekvation (4) och får då följande ekvation för f,

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} - \frac{1}{r^2} f = 0\,. \tag{9}$$

Denna ekvation har lösningen

$$f = Ar + \frac{B}{r}\,, \tag{10}$$

där A och B är två integrationskonstanter. Randvillkoret (5) ger nu att

$$A - \frac{B}{a^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad B = a^2 A\,, \tag{11}$$

och randvillkoret (8) ger att $A = U$. Följaktligen har vi att

$$\phi = \cos\theta\, Ur \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) , \tag{12}$$

Som tidigare påpekats så är detta lösningen till problemet för vilket vi krävt att $|r\mathbf{u}| \to 0$ as $r \to \infty$. Om vi däremot tillåter att $|r\mathbf{u}|$ är ändligt då $r \to \infty$ så kan vi addera lösningen

$$\phi_{pv} = -\frac{\Gamma}{2\pi}\theta\,, \tag{13}$$

vilket är potentialfältet för en potentialvirvel med cirkulationen Γ, där Γ är positiv för en medurs virvel. Det är lätt att övertyga sig om att detta fält uppfyller randvillkoret (5) på cylindern, eftersom den radiella hastigheten är noll för en potentialvirvel. Hastighetsfältet kan nu beräknas ur potentialfältet

$$u_r = \cos\theta\, U \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) , \tag{14}$$

$$u_\theta = -\sin\theta\, U \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi r}\,. \tag{15}$$

Hastigheten på cylindern fås genom att sätta $r = a$,

$$\mathbf{u}(a,\theta) = -\left(2U\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi a}\right)\mathbf{e}_\theta\,. \tag{16}$$

2 D'Alamberts paradox och Kutta-Zhukhovskys sats

Med hjälp av det fält som vi tagit fram för potentialströmning kring en cylinder så ska vi nu härleda två klassiska teorem i potentialströmningsteori. Även om vi härleder dem för strömningen kring en cylinder så gäller de mer generellt för för potentialströmning kring en godtyckliga tvådimensionella kropp.

Eftersom vi har antagit att fluiden är inviskös så påverkas cylindern endast av tryckkraften. Kraften (per längdenhet i z-led) på cylindern kan skrivas

$$\mathbf{f} = -\int_C p_c \mathbf{e}_r \,\mathrm{d}s = -\int_0^{2\pi} p_c \mathbf{e}_r a \,\mathrm{d}\theta\,, \tag{17}$$

där p_c är trycket på cylindern. Tryckfördelningen på cylindern kan vi nu få från Bernoullis ekvation. Om p_∞ är trycket långt uppströms så får vi

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 = p_c + \frac{1}{2}\rho\left(2U\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi a}\right)^2 . \tag{18}$$

Motståndet och lyftkraften (per längdenhet i z-led) är lika med x- och y-komponenten av $\mathbf{f}$. Eftersom $\mathbf{e}_r = \cos\theta\mathbf{e}_x + \sin\theta\mathbf{e}_y$ kan vi nu beräkna motståndet och lyftkraften på följande sätt

$$
\begin{aligned}
D &= \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{f} = \\
&= -\int_0^{2\pi} \left\{ p_\infty + \frac{1}{2}\left(\rho U^2 - \left(2U \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi a}\right)^2\right)\right\} \cos\theta a \, \mathrm{d}\theta = 0 \, , \qquad (19) \\
L &= \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{f} = \\
&= -\int_0^{2\pi} \left\{ p_\infty + \frac{1}{2}\left(\rho U^2 - \left(2U \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi a}\right)^2\right)\right\} \sin\theta a \, \mathrm{d}\theta = \rho U \Gamma \, . \qquad (20)
\end{aligned}
$$

Ekvation (19) kallas D'Alamberts paradox och säger att det inte finns något luftmotsånd på en kropp som är omvägen av potentialströmning, vilket naturligtvis är ett orimligt resultat. Ekvation (20), som kallas för Kutta-Zhukhovskys sats, säger att lyftkraften är lika med $\rho U \Gamma$ där Γ är cirkulationen kring kroppen. Detta resultat stämmer ganska väl, speciellt för tunna, strömlinjeformade kroppar så som vingar. Hur kan det vara så att samma typ av uträkning dels ger ett resultat som är helt orimligt och dels ett resultat som stämmer ganska väl? Som vi ska se i den sista föreläsningen så kommer tryckmotståndet i verkligheten att vara mycket större än det viskösa motståndet för trubbiga kroppar. För en mycket tunn strömlinjeformad kropp så kommer det viskösa motståndet inte att vara försumbart. I idealfallet av en extremt tunna plan platta så kommer det inte att vara något tryckmotstånd. För en tunn platta med Blasiusgränsskikt på båda sidor kommer motståndet att vara

$$
D = 1.328 \rho U^2 L Re^{-1/2} \, , \qquad (21)
$$

där L är plattans längd och $Re = UL/\nu$ är Reynoldstalet. Då $Re \to \infty$ så går motståndet mycket riktigt mot noll. För lyftkraften så är motsvarande resultat

$$
L = \rho U \Gamma + \mathcal{O}(\rho U^2 L Re^{-1/2}) \, , \qquad (22)
$$

och då $Re \to \infty$ så gäller Kutta-Zhukhovskys sats.

3 Komplex potential och hastighet

Realdelen och imaginardelen av en analytisk funktion

$$
\mathcal{W}(z) = \phi + i\Psi \qquad (23)
$$

där $z = x + iy$, uppfyller som bekant, Cauchy-Riemann-ekvationerna

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} \, , \qquad (24) \\
\frac{\partial \phi}{\partial y} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \, . \qquad (25)
\end{aligned}
$$

Det följer direkt från Cauchy-Riemann-ekvationerna att ϕ och Ψ båda uppfyller Laplace-ekvationen. Om vi identifierar ϕ med potentialen för hastighetsfältet så ser vi att Ψ är strömfunktionen. Eftersom $\mathcal{W}$ är analytisk kan vi beräkna dess derivata som

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{W}}{\mathrm{d}z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\mathcal{W}(z + \Delta z) - \mathcal{W}(z)}{\Delta z} \tag{26}$$

där $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ kan väljas valfritt. Exempelvis så kan vi välja $\Delta z = \Delta x$. Detta val ger

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{W}}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x} = u - iv\,, \tag{27}$$

där u och v är hastighetsfältets x- och y-komponent. Sammanfattningsvis så kan vi alltså tolka realdelen respektive imaginärdelen av en godtycklig analytisk funktion som potentialen respektive strömfunktionen för ett tvådimensionellt hastighetsfält. Hastighetsfältet kan beräknas på tre sätt. Antingen kan vi beräkna de Cartesiska komponenterna genom att direkt använda oss av (27) eller så kan vi beräkna den genom att använda oss av någon av sambanden

$$\mathbf{u} = \nabla\phi\,, \tag{28}$$

$$\mathbf{u} = \nabla \times (\mathbf{e}_z\Psi)\,. \tag{29}$$

Om vi inte är intresserade av de Cartesiska komponenterna utan av den radiella och den azimutala komponenten så är något av de sistnämnda alternativen att föredra. Eftersom Laplace-ekvationen är linjär så kan vi också superponera strömningsfält. På så sätt kan vi konstruera relativt intrikata strömningsfält genom att superponera ett antal elementära fält som vi väljer som legobitar ur en låda.

4 Några elementära fält

4.1 Friström

$$\mathcal{W} = Uz = Ure^{i\theta}\,. \tag{30}$$

Det är lätt att se att denna komplexa potentialen som ger en konstant friström U i x-led.

4.2 Strömning kring ett hörn

$$\mathcal{W}(z) = Az^n = Ar^n e^{in\theta}\,, \tag{31}$$

där A är en konstant och $n \geq 1/2$. Denna komplexa potential ger den reella potentialen och strömfunktionen

$$\phi = Ar^n\cos(n\theta)\,, \qquad \Psi = Ar^n\sin(n\theta)\,. \tag{32}$$

Strömlinjerna ges bekant av Ψ = Konstant. Vi ser omedelbart att de två räta linjerna $\theta = 0$ och $\theta = \pi/n$ är två strömlinjer, eftersom $\Psi = 0$ på dessa linjer. Strömningen kan därför tolkas som strömningen kring ett hörn med öppningsvinkel π/n.

4.3 Källa–Sänka

$$\mathcal{W}(z) = \frac{m}{2\pi} \ln z = \frac{m}{2\pi} \ln(ri\theta) \,. \tag{33}$$

Vi ser att

$$\phi = \frac{m}{2\pi} \ln r \,, \qquad \Psi = \frac{m}{2\pi}\theta \,, \tag{34}$$

som ger hastighetskomponenterna

$$u_r = \frac{m}{2\pi r} \,, \qquad u_\theta = 0 \,. \tag{35}$$

Om $m > 0$ så är detta en källa lokaliserad i origo från vilket vi har ett flöde

$$q = \int_C u_r \, \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \frac{m}{2\pi r} r \, \mathrm{d}\theta = m \,. \tag{36}$$

där vi integrerat över en cirkel med radien r. Om $n < 0$ så flödar det in mot origo och vi säger därför att vi då har en sänka i origo.

4.4 Potentialvirvel

$$\mathcal{W}(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(re^{i\theta}) \,. \tag{37}$$

Vi ser att

$$\phi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\theta \,, \qquad \Psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \,, \tag{38}$$

som ger hastighetskomponenterna

$$u_r = 0 \,, \qquad u_\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \,. \tag{39}$$

Detta är som bekant en potentialvirvel med cirkulationen Γ i medurs riktning. Om $\Gamma > 0$ har vi medurs rotation och om $\Gamma < 0$ har vi moturs rotation.

4.5 Dipol

$$\mathcal{W}(z) = \frac{\mu}{z} = \frac{\mu}{r} e^{-i\theta} \,. \tag{40}$$

där μ är dipolstyrkan (som inte ska förväxlas med viskositeten). Vi ser att

$$\phi = \frac{\mu \cos\theta}{r} = \frac{\mu x}{x^2 + y^2} \,, \qquad \Psi = -\frac{\mu \sin\theta}{r} = -\frac{\mu y}{x^2 + y^2} \,. \tag{41}$$

Strömlinjerna är isolinjer till strömfunktionen. För att ta fram ekvationen för strömlinjerna sätt $\mu/(2\Psi) = -C$ där C är en positiv eller negativ konstant som är olika för olika strömlinjer. Strömlinjernas ekvation kan då skrivas

$$x^2 + (y - C)^2 = C^2 \,, \tag{42}$$

vilket är cirklar med centrum i $(x, y) = (0, C)$ och radie $|C|$. Cirklarna tangerar alltså origo. Dessutom är x-axeln en strömlinje.

4.6 Strömning kring en cylinder

Den lösning som vi tagit fram för strömningen kring en cylinder kan skrivas som en superposition av en friström, en dipol med styrkan $\mu = Ua^2$ och en potentialvirvel. Den komplexa potentialen kan alltså skrivas

$$\mathcal{W}(z) = Uz + \frac{Ua^2}{z} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z \,. \tag{43}$$

Genom att identifiera realdelen och imaginärdelen ser vi att

$$\phi = Ur\cos\theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi}\theta \,, \tag{44}$$

$$\Psi = Ur\sin\theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \,. \tag{45}$$

Vi ser att potentialen, ϕ, är identisk med den vi tagit fram tidigare. Från strömfunktionen ser vi också att $r = a$ är en strömlinje. Vi har redan beräknat den radiella och den azimutala hastighetskomponenten. För att beräkna de Cartesiska komponenterna är det enklast att använda sig av (27), vilket ger

$$u = Re\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{W}}{\mathrm{d}z}\right) = Re\left(U - \frac{Ua^2}{z^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi z}\right) = U - \frac{Ua^2}{r^2}\cos(2\theta) + \frac{\Gamma}{2\pi r}\sin\theta \,, \tag{46}$$

$$v = -Im\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{W}}{\mathrm{d}z}\right) = -Im\left(U - \frac{Ua^2}{z^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi z}\right) = -\frac{Ua^2}{r^2}\sin(2\theta) - \frac{\Gamma}{2\pi r}\cos\theta \,. \tag{47}$$