



## Modul 6: Integraler och tillämpningar

Denna modul omfattar kapitel 6.3 och 6.5 samt kapitel 7 i kursboken Calculus av Adams och Essex och undervisas på tre föreläsningar, två övningar och ett seminarium.

**Viktiga begrepp.** Denna modul handlar om **integraler** och deras **tillämpningar**. I kapitel 6.3 fortsätter vi med variabelsubstitutioner och i kapitel 6.5 diskuterar vi **generaliserade integraler**. Av de senare finns två typer: där intervallet är obegränsat och där integranden är obegränsad. I båda fallen löser man problemet genom att ta ett gränsvärde. I kapitel 7 handlar det så om tillämpningar. Det är viktigt att lära sig tekniken med **Riemannsummor**, som används till exempel i härledningen av formeln för båglängd i kapitel 7.3. Den behövs också i uppgift 10 nedan, som även har en fullständig lösning i facit.

Det är viktigare att behärska metoden som nämns ovan än att komma ihåg olika formler från fysik mm. Det är dock bra att vara säker på rotationsvolym, rotationsarea och båglängd.

**Rekommenderade uppgifter ur kursboken Calculus.** Kapitel 6.3: 1, 3, 9. Kapitel 6.5: 1, 3, 5, 15, 23, 33, 34, 35. Kapitel 7.1: 1, 3, 5, 13, 19, 21. Kapitel 7.2: 1, 3. Kapitel 7.3: 3, 11, 21. Kapitel 7.4: 1, 3, 5. Kapitel 7.6: 1, 7. Kapitel 7.7: 1, 5.

KAN DU DET HÄR TILLRÄCKLIGT BRA? TESTA DIG SJÄLV!

**Uppgift 1.** Ange på vilket sätt dessa integraler är generaliserade och beräkna dem.

A.  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

B.  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

C.  $\int_1^{\infty} x e^{-x} dx$

D.  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

E.  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$

**Uppgift 2.** Avgör om nedanstående generaliserade integraler är konvergenta eller divergenta.

A.  $\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$

B.  $\int_{10}^{\infty} \frac{x + \ln x}{x^2} dx$

C.  $\int_0^{\infty} x \sin x dx$

D.  $\int_2^{\infty} \frac{x^2 + 1 + \sqrt{x}}{x\sqrt{x} + x^3} dx$

E.  $\int_{30}^{\infty} \frac{x\sqrt{x} + x}{1-x^3} dx$

F.  $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$

**Uppgift 3.** Avgör om det obegränsade område som ligger mellan kurvorna  $y = 1$  och  $y = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 4x + 3}$ , när  $0 \leq x < \infty$ , har ändlig area.

**Uppgift 4.** Härled med hjälp av Riemannsummor formlerna för rotationsvolym runt  $x$ - resp  $y$ -axeln och beräkna sedan den rotationsvolym som genereras när området mellan kurvan  $y = x^3$  och  $x$ -axeln på intervallet  $0 \leq x \leq 1$  roteras ett varv runt

- A.  $x$ -axeln
- B.  $y$ -axeln

**Uppgift 5.** Härled följande formler med hjälp av rotationsvolymsteknik.

A. Volymen  $V$  av ett klot med radie  $r$  ges av  $V = \frac{4\pi r^3}{3}$

B. Volymen  $V$  av en kon med basradie  $r$  och höjd  $h$  ges av  $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

Tips för B: snekla vid behov på nästa uppgift.

**Uppgift 6.** Härled formeln  $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$  för mantelytans area  $A$  av en kon med basradie  $r$  och höjd  $h$  genom att betrakta den som den rotationsarea som genereras när  $y = rx/h$  på intervallet  $0 \leq x \leq h$  roteras runt  $x$ -axeln.

**Uppgift 7.** Beräkna längden av kurvan  $y = \ln(1 - x^2)$ ,  $0 \leq x \leq 0.5$ .

**Uppgift 8.** En cylindrisk silo med radie 2 meter och höjd 6 meter är fullpackad. Densiteten  $\rho$  av innehållet varierar med höjden  $h$  enligt formeln

$$\rho(h) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h}{2}}} \text{ ton/m}^3.$$

Beräkna massan av innehållet i silon.

**Uppgift 9.** Ett fordon startar från stillastående och kör 30 minuter rakt framåt med accelerationen  $2 + 60t$  km/h<sup>2</sup>. Vad är fordonets hastighet efter 30 minuter? Hur långt hinner fordonet?

**Uppgift 10.** För en viss fjäder gäller att kraften som krävs för att trycka ihop fjädern  $x$  meter är  $F(x) = x/2$  N. Hur stort arbete krävs för att trycka ihop denna fjäder 1/10 meter?

**Uppgift 11.** Vi ska beräkna tyngdpunkten av en homogen halvcirkelskiva. Låt halvcirkelskivan ges av olikheterna

$$x^2 + y^2 \leq R^2, \quad y \geq 0.$$

Det är klart av symmetriskäl att  $x$ -koordinaten för tyngdpunkten måste vara 0. Vad blir  $y$ -koordinaten? Tips: kolla vid behov upp formeln för tyngdpunkt i boken.

**Uppgift 12.** Beräkna integralen  $\int \frac{dt}{\sin t}$  med hjälp av substitutionen  $x = \tan(t/2)$ .

Tips: vid denna substitution gäller sambanden

$$\cos t = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}, \quad \sin t = \frac{2x}{1 + x^2}, \quad dt = \frac{2dx}{1 + x^2}.$$

(Kan du räkna ut denna integral på något annat sätt?)

## FACIT OCH LÖSNINGSTIPS

1. A. Obegränsat intervall.  $\pi/2$
1. B. Integranden obegränsad när  $x \rightarrow 1$ .  $\pi/2$
1. C. Obegränsat intervall.  $2/e$
1. D. Integranden obegränsad när  $x \rightarrow 1$ . 2
1. E. Obegränsat intervall. 2
2. A. Konvergent
2. B. Divergent
2. C. Divergent
2. D. Divergent
2. E. Konvergent
2. F. Divergent
3. Arean är  $\frac{\ln 3}{2}$
4. A.  $\pi/7$
4. B.  $2\pi/5$
- 5.
- 6.
7.  $\ln 3 - \frac{1}{2}$
8.  $16\pi$  ton
9. Sluthastigheten är 8.5 km/h och fordonet hinner 1.5 km.

10. Svar: 1/400 Nm. Lösning: Arbete är kraft gånger väg, om kraften är konstant och i vägens riktning. Problemet här är att kraften inte är konstant. Då får man göra så här: Dela in intervallet från 0 till 1/10 i många små delintervall. På ett litet sådant delintervall av längd  $\Delta x$  vid en punkt  $x$  är kraften ungefär konstant (om delintervallet är litet så hinner inte kraften ändra sig så mycket under det lilla intervallet eftersom kraften varierar kontinuerligt). Arbetet för att göra den lilla längdändringen  $\Delta x$  vid punkten  $x$  blir därför ungefär  $F(x)\Delta x$ . Arbetet för att göra hela längdändringen blir summan av arbetena på alla dessa små delintervall, vilket är en Riemannsumma som när delintervallens längd går mot 0 konvergerar mot integralen

$$\int_0^{1/10} F(x) dx = \int_0^{1/10} \frac{x}{2} dx = \frac{1}{400} \text{ Nm}$$

som alltså är det arbete som krävs för att längdändra fjädern 0.1 meter.

Ibland skriver man i tillämpningar ovanstående resonemang betydligt mer kortfattat ungefär så här:

Arbetet för att göra en liten längdändring  $dx$  vid punkten  $x$  är  $F(x) dx$ . Hela arbetet fås genom summation till

$$\int_0^{1/10} F(x) dx = \int_0^{1/10} \frac{x}{2} dx = \frac{1}{400} \text{ Nm}$$

som alltså är det arbete som krävs för att längdändra fjädern 0.1 meter.

11.  $\frac{4R}{3\pi}$

12.  $\ln \tan \frac{t}{2} + C$ , med  $C$  godt konstant. Ja.