Lösningar Reglerteknik AK Tentamen 2015–10–30

Uppgift 1a

Systemet är stabilt (pol i -2), så vi kan använda slutvärdesteoremet för att bestämma

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sG(s)\frac{10}{s} = G(0)10 = 5l_0 = r = 10$$

Svar: $l_0 = 2$

Uppgift 1b

Svar: Insignal: flöde av distillerat vatten som styrs via ventilen.
Utsignal: saltkoncentrationen i utflödet.
Störsignal: Variationer i saltkoncentration i koksaltlösningen.

Uppgift 1c

Känslighetsfunktionen är stabil så vi kan använda frekvensanalys för att räkna ut störningsundertryckningen

$$|S(i0.2)| = \left|\frac{0.2i}{0.2i+10}\right| = \frac{0.2}{\sqrt{100+0.2^2}} < \frac{1}{50}$$

Svar: En sinus-störning med frekvens 0.2 radianer per sekund undertrycks mer än med en faktor femtio, dvs specifikationen är uppfylld.

Uppgift 1d

Det finns flera möjliga lösningar. Vi använder här diagonalform via partialbråksuppdelning

$$G(s) = \frac{10}{(s+2)(s-1)(s+4)} = \frac{a}{(s+2)} + \frac{b}{(s-1)} + \frac{c}{(s+4)}$$

där $a = -5/3,\ b = 2/3\ c = 1$. Detta innebär att

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -5/3 & 2/3 & 1 \end{bmatrix}$$

Svar: Egenvärdena till A är lika med polerna till $G(s)$, d.v.s. $-2, 1, -4$. Detta kan direkt ses via diagonala valet av A

Uppgift 2a

Från figuren ses att polerna ligger i $\{-1, -\varepsilon + i, -\varepsilon - i\}$. Ansätt därför att

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{s-(-1)} \times \frac{1}{s-(-\varepsilon+i)} \times \frac{1}{s-(-\varepsilon-i)} \\ &= \frac{1}{s+1} \times \frac{1}{(s+\varepsilon-i)(s+\varepsilon+i)} \\ &= \frac{1}{s+1} \times \frac{1}{(s+\varepsilon)^2 + (s+\varepsilon)i - i(s+\varepsilon) - i^2} \\ &= \frac{1}{s+1} \times \frac{1}{(s+\varepsilon)^2+1}. \end{aligned}$$

Denna överföringsfunktion har dock statisk förstärkning

$$H(0) = \frac{1}{0+1} \times \frac{1}{(0+\varepsilon)^2+1} = \frac{1}{\varepsilon^2+1}.$$

Den sökta överföringsfunktionen $G(s)$ ska ha statisk förstärkning ett, så vi normaliserar $H(s)$ enligt

$$G(s) = \frac{H(s)}{H(0)} = \frac{1}{s+1} \times \frac{\varepsilon^2+1}{(s+\varepsilon)^2+1},$$

så att $G(0) = 1$.

Svar: $G(s) = \frac{1}{s+1} \frac{\varepsilon^2+1}{(s+\varepsilon)^2+1}$.

Uppgift 2b

För stora ε är den reella polen klart dominant. Så stegsvar C hör till $\varepsilon = \frac{3}{2}$. Dämpningen (cosinus av vinkeln mot negativa reella axeln) minskar allteftersom de komplexa polerna rör sig mot den imaginära axeln, dvs. när ε minskar. Detta ger att D hör till $\varepsilon = \frac{1}{3}$, B till $\varepsilon = \frac{1}{2}$ och A till $\varepsilon = \frac{2}{3}$.

Svar: $\varepsilon_A = \frac{2}{3}, \varepsilon_B = \frac{1}{2}, \varepsilon_C = \frac{3}{2}$ och $\varepsilon_D = \frac{1}{3}$.

Uppgift 2c

Eftersom $G_1(s) = sG(s)$ får vi

$$|G_1(i\omega)| = \omega |G(i\omega)| \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \log|G_1(i\omega)| &= \log\omega + \log|G(i\omega)| \\ \arg G_1(i\omega) &= \frac{\pi}{2} + \arg G(i\omega) \end{aligned}$$

Detta innebär att förstärkningen (amplitudkurvan) skalas med ω vilket i logaritmisk skala motsvaras av addition med $\log\omega$ (extra lutning $+1$ för alla frekvenser)
Faskurvan ökas med $\pi/2 = 90^o$ för all frekvenser.

Uppgift 3a

Dessa värden kan hittas i Nyquist-diagrammet:

- $\omega_c = 5.28$ rad/s;
- $\omega_p = 12.6$ rad/s;
- $\phi_m = \arctan(\frac{0.74}{0.85}) = 41.04^o$;
- $A_m = \frac{1}{0.21} = 4.76$.

Uppgift 3b

Målet är att konstruera en lead-lag-regulator

$$F(s) = K\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D s + 1}\frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}$$

så att specifikationerna för det slutna systemet uppfylls
Önskad fasmarginal är $\varphi_m = 60^o$ vilket medför att vi måste öka fasen med $\varphi_{max} = 60^o - 41.0^o + 5.7^o = 24.7^o$, där 5.7^o kommer från lag-länk. Andra kravet innebär att skärfrekvensen måste vara $\omega_{c,d} \approx \omega_B \approx \omega_c = 5.3$ rad/s. Slutligen krävs $\gamma = 0$, eftersom (för stabila system)

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)F(s)}L(s) \;\Rightarrow\; \lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{G(0)}{1 + G(0)F(0)} = 0$$

om och endast om $F(s)$ innehåller en integrator
Följaktligen

- $\varphi_{max} \Rightarrow \beta = 0.4$ (Fig. 5.13, p. 106, Glad and Ljung book);
- $\tau_D = \frac{1}{\omega_{c,d}\sqrt{\beta}} = 0.30$;
- $K = \frac{\sqrt{\beta}}{|G(j\omega_{c,d})|} = 0.63$;
- $\tau_I = \frac{10}{\omega_{c,d}} = 1.90$.

Svar:

$$F(s) = K\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D s + 1}\frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}, \quad \beta = 0.4, \tau_D = 0.30, K = 0.63, \tau_I = 1.90$$

Uppgift 3c

Tidsfördröjningen innebär $\arg(F(j\omega)G(j\omega)e^{-j\omega T}) = arg(F(j\omega)G(j\omega)) - \omega T$, dvs fasen minskas med ωT rad. För 15^o och $\omega_c = 5.28$ rad/s krävs $\omega_c T \leq \frac{15\pi}{180}$
Svar: $T \leq 0.05$ s

Uppgift 4

(a) Slutna systemets överföringsfunktion är

$$G_c(s) = \frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)} = \frac{2K_1(s+2)}{s(s+3)+2K_1(s+2)}.$$

vilket medför

$$\begin{aligned} P(s) &= s(s+3), \\ Q(s) &= 2(s+2). \end{aligned}$$

- **Start- och Ändpunkter:** 2 startpunkter ($p_1 = 0$ and $p_2 = -3$), en ändpunkt ($q_1 = -2$),
- **Asymptot:** $n - m = 1$ asymptotet med riktning π
- **Re-axeln** $[-\infty, -3]$ och $[-2, 0]$
- **Im-axeln**

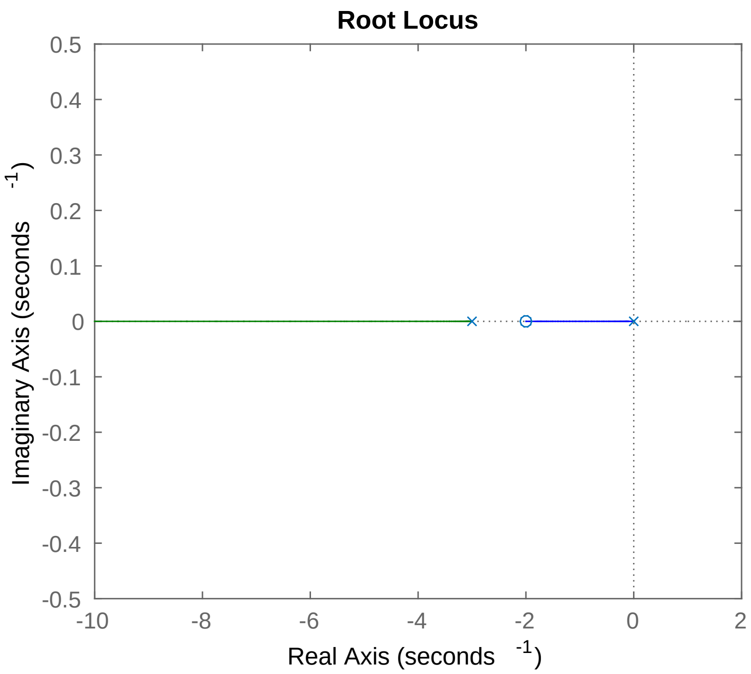
$$\begin{gathered} P(i\omega^*) + K_1 Q(i\omega^*) = 0 \\ i\omega^*(i\omega^* + 3) + 2K_1(i\omega^* + 2) = 0 \\ -\omega^{*2} + 3i\omega^* + 2iK_1\omega^* + 4K_1 = 0 \end{gathered}$$

dvs

$$\begin{cases} -\omega^{*2} + 4K_i = 0 \\ 3\omega^* + 2K_i\omega^* = 0 \end{cases}$$

med enda lösning $\omega^* = 0$ och $K_1 = 0$.

Rotort



Svar: Stabilt för alla $K_1 > 0$.

(b) För $K_1 = 1$ fås

$$G_c(s) = \frac{2s+4}{s^2+5s+4}.$$

För ett enhetssteg som referens fås

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

dvs

$$Y(s) = W(s)R(s) = \frac{2s+4}{s^2+5s+4}\,\frac{1}{s} = \frac{2s+4}{s^3+5s^2+4s} = \frac{2s+4}{s(s+1)(s+4)}$$

Partialbråksuppdelning

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{\frac{2}{3}}{s+1} - \frac{\frac{1}{3}}{s+4}.$$

Inverse Laplace

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\}[t] = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}[t] - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{2}{3}}{s+1}\right\}[t] - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{3}}{s+4}\right\}[t], \\ &= h(t) - \frac{2}{3}e^{-t}h(t) - \frac{1}{3}e^{-4t}h(t). \end{aligned}$$

där $h(t)$ är Heavyside steg-funktionen.

Eftersom $r(t) = h(t)$,

$$\lim_{t\to\infty}[r(t) - y(t)] = \lim_{t\to\infty} \frac{2}{3}e^{-t}h(t) + \frac{1}{3}e^{-4t}h(t) = 0.$$

(c) Här är

$$G_c(s) = \frac{G(s)F(s)}{1 + G(s)F(s)} = \frac{K_2\omega_0(s+2)}{(s^2+\omega_0^2)(s+3) + (s+2)K_2\omega_0}.$$

med

$$\begin{aligned} P(s) &= (s^2+\omega_0^2)(s+3), \\ Q(s) &= (s+2)\omega_0. \end{aligned}$$

- **Start- och Ändpunkter:** $sn = 3$ startpunkter ($p_1 = -3$ and $p_{2,3} = \pm\omega_0$), $m = 1$ ändpunkt ($q_1 = -2$),
- **Asymptoter:** $n - m = 2$ asymptoter med skärningspunkt

$$z = \frac{\sum_i p_i - \sum_i q_i}{n-m} = \frac{\omega_0 + (-\omega_0) + (-3) - (-2)}{2} = -\frac{1}{2}.$$

- **Re-axeln** $-3, -2]$
- **Im-axeln**

$$\begin{gathered} P(i\omega^*) + K^*Q(i\omega^*) = 0 \\ \big((i\omega^*)^2 + \omega_0^2\big)(i\omega^* + 3) + K^*\omega_0(i\omega^* + 2) = 0 \\ \big(-\omega^{*2} + \omega_0^2\big)(i\omega^* + 3) + K^*\omega_0(i\omega^* + 2) = 0 \\ -i\omega^{*3} - 3\omega^{*2} + i\omega_0^2\omega^* + 3\omega_0^2 + iK^*\omega_0\omega^* + 2K^*\omega_0 = 0 \end{gathered}$$

vilket ger

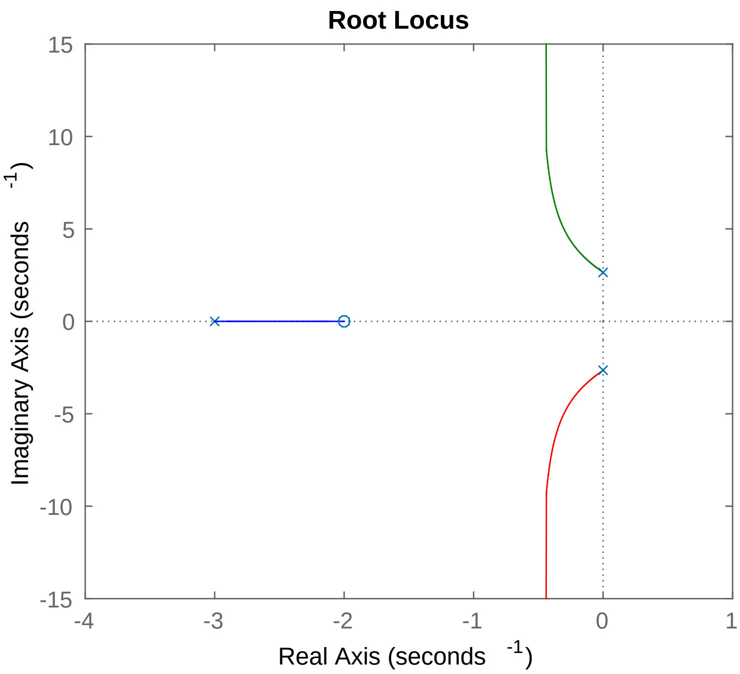
$$\begin{cases} -\omega^{*3} + \omega_0^2\omega^* + K^*\omega_0\omega^* = 0 \\ -3\omega^{*2} + 3\omega_0^2 + 2K^*\omega_0 = 0 \end{cases}$$

med lösningar

$$\begin{gathered} \omega_1^* = 0, \quad K_1^* = \frac{-3}{2} \\ \omega_{2,3}^* = \pm\omega_0, \quad K_{2,3}^* = 0 \end{gathered}$$

Den första lösningen har negativ förstärkning och de två andra är startpunkter, dvs rotorten skär inte imaginära axeln för $K > 0$

Rotort



Svar: Stabilt för alla $K_2 > 0$.

(e) Om $r(t) = \sin(\omega_0 t)$, fås

$$y_{ss}(t) = |G_c(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \arg G_c(j\omega_0)).$$

Eftersom

$$G_c(i\omega_0) = \frac{(i\omega_0 + 2)K\omega_0}{\big((i\omega_0)^2 + w_0^2\big)(i\omega_0 + 3) + (i\omega_0 + 2)K\omega_0} = 1,$$

fås

$$|G_c(i\omega_0)| = 1, \qquad \arg G_c(i\omega_0) = 0,$$

och

$$y_{ss}(t) = \sin(\omega_0 t).$$

dvs

$$r(t) - y(t) = 0,$$

Svar: Föreslagen regulator följer perfekt en sinusreferenssignal efter insvängning

Exercise 5

(a) En tillståndsmodell för slutna systemet blir

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (a-l)x(t), \qquad x(0) = x_0, \\ y(t) &= x(t). \end{aligned}$$

eftersom $y(t) = x(t)$, så fås

$$\dot{y}(t) = (a-l)y(t),$$

med lösning

$$y(t) = \kappa e^{(a-l)t},$$

där κ bestäms av initialvärdet

$$y(0) = \kappa = x(0) = x_0,$$

dvs

$$y(t) = x_0 e^{(a-l)t}$$

Motsvarande utsignal ges av

$$u(t) = -lx(t) = -ly(t) = -lx_0 e^{(a-l)}t.$$

Systemet är stabilt om

$$\mathbf{Re}\{a-l\} = a-l < 0$$

dvs

$$l > a.$$

(b) Beräkna

$$J(l) = \int_0^\infty [y(\tau)^2 + qu(\tau)^2] \mathrm{d}\tau.$$

med lösningarna från Uppgift 5a)

$$\begin{aligned} J(l) &= \int_0^\infty \left[\left(x_0 e^{(a-l)\tau} \right)^2 + q \left(-lx_0 e^{(a-l)\tau} \right)^2 \right] \mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^\infty \left[x_0^2 e^{2(a-l)\tau} + ql^2 x_0^2 e^{2(a-l)\tau} \right] \mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^\infty x_0^2 (1+ql^2) e^{2(a-l)\tau} \mathrm{d}\tau \\ &= \left| x_0^2 (1+ql^2) \frac{e^{2(a-l)\tau}}{2(a-l)} \right|_0^\infty \\ &= -\frac{x_0^2(1+ql^2)}{2(a-l)} \end{aligned}$$

För optimal l krävs

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}J(l) = 0,$$

dvs

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}J(l) &= 0,\\
-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\frac{x_0^2(1+ql^2)}{2(a-l)} &= 0,\\
-\frac{x_0^2}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\frac{(1+ql^2)}{a-l} &= 0,\\
-\frac{2ql(a-l)+(1+ql^2)}{(a-l)^2} &= 0,\\
2ql(a-l)+1+ql^2 &= 0,\\
l^2-2al-\frac{1}{q} &= 0.
\end{aligned}$$

med lösningar

$$l_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2+\frac{1}{q}}$$

där

$$l_1 = a + \sqrt{a^2+\frac{1}{q}}$$

är den enda stabiliserande lösningen pga kravet $l_1 > a$.

(c) För optimalt återkoppling $u(t) = -l_1x(t)$, fås återkoppplad pol

$$p(q) = a - l_1(q) = -\sqrt{a^2+\frac{1}{q}}.$$

När $q \to \infty$, vill vi använda minsta möjliga styrsignal. Detta ger

$$l_1(0) = a + |a|.$$

Om öppna systemet är stabilt, $a < 0$, så fås öppen styrning $l_1(0) = 0$ med pol

$$p(0) = a - l_1(0) = a.$$

Om öppna systemet är instabilt, $a > 0$, så speglas öppna systemets pol i imaginära axeln

$$p(0) = a - l_1(0) = -a.$$