

SF1661 Perspektiv på matematik
Tentamen 7 januari 2016 kl 14.00 – 19.00

Skrivtid: 5 timmar

Inga tillåtna hjälpmedel

Examinator: Hans Thunberg

Tentamen består av nio uppgifter som var och en ger maximalt fyra poäng. För full poäng på en uppgift krävs att lösningarna är väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

På de tre första uppgifterna, som utgör del I, är det endast möjligt att få 0, 3 eller 4 poäng. Dessa tre uppgifter kan ersättas med resultat från den löpande examinationen. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning eller godkänd seminariserie ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning eller seminariserie ger 4 poäng. För att höja från den löpande examinationen från 3 poäng till 4 krävs att hela uppgiften löses.

Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

Uppgifterna 4 – 6 utgör del II. De tre sista uppgifterna utgör del III. För betygen A och B krävs ett visst antal poäng på del III.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

Dessa poänggränser är preliminära och kan komma att justeras.

DEL I

- (1) Låt A och B vara de delmängder av grundmängden (universet) $\mathbb{R}$ som definieras av att

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} \quad \text{och} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x < 4\}.$$

Bestäm följande mängder.

$$\text{a) } A \cup B \quad \text{b) } A \cap B \quad \text{c) } A \setminus B \quad \text{d) } A^C$$

Tre korrekta deluppgifter ger 3 poäng, fyra korrekta deluppgifter ger 4 poäng.

- (2) Låt C vara den cirkel som passerar genom punkten $(-1, 2)$ och har medelpunkt i $(-2, 4)$. Skär denna cirkel y -axeln, och i så fall i vilken eller vilka punkter?

- (3) Beräkna och skriv på så enkel form som möjligt

$$\text{(a) } 3\sqrt{3} \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^3 \qquad \text{(b) } \frac{2 \ln e^3 + \ln \frac{1}{e^4}}{\frac{1}{4} \ln e^8}$$

$$\text{(c) } \frac{1+i}{1-i} \quad (\text{där } i^2 = -1) \qquad \text{(d) } \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$$

Tre korrekta deluppgifter ger 3 poäng, fyra korrekta deluppgifter ger 4 poäng.

DEL II

- (4) a) Bevisa att det inte finns några naturliga tal n och m sådana att $\left(\frac{n}{m}\right)^2 = 2$. (2 p)

b) Finns det några rationella tal r och s sådana att $\left(\frac{r}{s}\right)^2 = 2$?

(Du kan använda påståendet från deluppgift 4 a), även om du inte har bevisat detta.) (2 p)

- (5) a) Lös olikheten

$$x + \frac{3}{2} > \frac{1}{x}.$$

(2 p)

- b) Lös olikheten

$$|2x - 3| \geq 4.$$

(2 p)

- (6) Låt
- z
- och
- w
- vara de komplexa talen
- $z = 1 + i\sqrt{3}$
- och
- $w = \sqrt{\frac{3}{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$
- . Beräkna

$$\frac{z^{12}}{w^{21}}$$

och svara på så enkel form som möjligt.

DEL III

- (7) a) Bestäm det största intervall innehållande punkten
- $-\pi/4$
- på vilket funktionen
- $f : I \rightarrow [-1, 1]$
- ,
- $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
- , är inverterbar. (3 p)

- b) Bestäm
- $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- , där
- f^{-1}
- betecknar inversen till funktionen
- f
- i uppgift 7 a). (1 p)

- (8) a) Härled ett uttryck för linjär approximation av en funktion
- $f(x)$
- i en omgivning av en punkt
- x_0
- . (2 p)

- b) Använd en lämplig linjär approximation för att bestämma ett närmevärde till
- $(1.02)^{10}$
- . (2 p)

- (9) Är det sant att

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

för alla positiva heltal n ?