TENTAMEN SF1661 7/1 2016
SVAR & LÖSNINGSFÖRSLAG

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x < 4\}$.

a) $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \text{ eller } x < 4\} = \mathbb{R}$

b) $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \text{ och } x < 4\} = [1, 4)$

c) $A \setminus B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \text{ och } x \not< 4\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \text{ och } x \geq 4\}$

$= [4, \infty)$

d) $A^c = \{x \in \mathbb{R} : x \notin A\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x < 1\} = (-\infty, 1)$

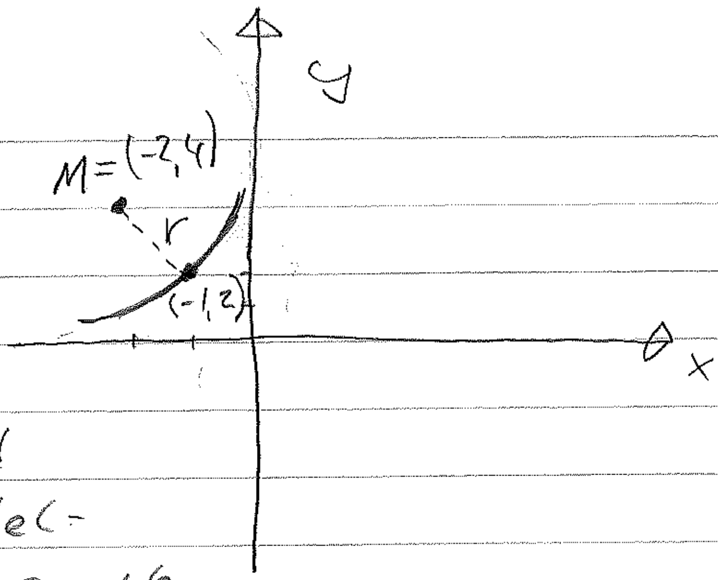
Svar: a) $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

b) $[1, 4)$

c) $[4, \infty)$

d) $(-\infty, 1)$

(2.) Låt r vara cirkelns radie.



Då är r lika med avståndet mellan medelpunkten (-2,4) och punkten (-1,2) på cirkeln. Alltså är

$$r^2 = (-2-(-1))^2 + (4-2)^2 = 1^2 + 2^2 = 5$$

Cirkelns ekvation är alltså

$$(x+2)^2 + (y-4)^2 = 5.$$

Eventuella skärningspunkter med y-axeln är punkter av formen (0, a) som uppfyller cirkelns ekvation.

$$(0+2)^2 + (a-4)^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow (a-4)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (a-4) = +1 \lor (a-4) = -1$$

$$\Leftrightarrow a = 5 \lor a = 3$$

<u>Svar:</u> Ja, cirkeln skär y-axeln i punkterna (0,3) och (0,5)

3. a) $3\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 =$

$= 3\sqrt{3}\left((\sqrt{3})^3 + 3(\sqrt{3})^2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 3\cdot\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3\right)$

$= 3\sqrt{3}\left(3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$= 9\cdot 3 + 9\cdot 3 + 9 + 1 = 2\cdot 27 + 10 = 64$

b) $\dfrac{2\ln e^3 + \ln\frac{1}{e^4}}{\frac{1}{4}\ln e^8} = \dfrac{2\cdot 3\ln e - 4\ln e}{8\cdot\frac{1}{4}\ln e}$

$= \dfrac{6-4}{2} = 1$

c) $\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{1^2+i^2+2i}{1^2-i^2} =$

$= \dfrac{1-1+2i}{1-(-1)} = \dfrac{2i}{2} = i$

d) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\dfrac{\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)} =$

$= -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\dfrac{\cos(\pi/4)}{(-\cos(\pi/3))} = (-1/\sqrt{2})\cdot\dfrac{(1/\sqrt{2})}{(-1/2)}$

$= \dfrac{-1/2}{-1/2} = 1$

<u>SVAR:</u> a) 64 b) 1 c) i d) 1

4.

a) Antag motsatsen, dvs. anta att det finns $n, m \in \mathbb{N}$ s.a. $\left(\frac{n}{m}\right)^2 = 2$

Då gäller att

$$n^2 = 2m^2$$

Tänk nu på primfaktoriseringen av V.L. och H.L.

Antag att $n = 2^k \cdot p$, $2 \nmid p$

och att $m = 2^l \cdot q$, $2 \nmid q$

dvs k är antalet 2:or i n:s primfaktorisering och l är antalet 2:or i m:s primfaktorisering.

Då är

$$V.L. = n^2 = (2^k p)^2 = 2^{2k} p^2$$

$$H.L. = 2m^2 = 2(2^l q)^2 = 2 \cdot 2^{2l} q^2 = 2^{2l+1} q^2$$

så V.L. innehåller ett jämnt antal 2:or, och H.L. ett udda antal 2:or i sin primfaktorisering $\Rightarrow$ V.L. $\neq$ H.L.

dvs $n^2 \neq 2m^2$.

Detta är en motsägelse, och vårt antagande måste vara felaktigt.

Alltså finns inga naturliga tal n, m s.a. $(n/m)^2 = 2$. V.S.B.

(Se kurslitteraturen för ett alternativt sätt att bevisa detta)

4 b) Nej, det finns inga rationella tal r och s sådan $(r/s)^2 = 2$.

Antag motsatsen, dvs att det finns $r = p/q$ och $s = t/u$ där p, q, t och u är heltal. Vi kan anta att p, q, t och u alla är > 0.

Då gäller

$$\left(\frac{p/q}{t/u}\right)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{p}{q} \cdot \frac{u}{t}\right)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{pu}{qt}\right)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n}{m}\right)^2 = 2$$

där $n = pu \in \mathbb{N}$ och $m = qt \in \mathbb{N}$ vilket motsäger påståendet i a).

Alltså finns inga rationella tal r och s sådana $(r/s)^2 = 2$.

$\blacksquare$

5 a) $x + \frac{3}{2} > \frac{1}{x} \iff x + \frac{3}{2} - \frac{1}{x} > 0$

$\iff \frac{x^2 + 3/2 x - 1}{x} > 0 \quad (*)$

Vi faktoriserar täljaren:

$x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0 \iff (x + \frac{3}{4})^2 = 1 + \frac{9}{16}$

$\iff (x + 3/4)^2 = \frac{25}{16} \iff x = -3/4 \pm 5/4$

så

$x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = (x - \frac{1}{2})(x + 2)$

Så olikheten $(*)$ är $\iff$

$\frac{(x - 1/2)(x+2)}{x} > 0.$

Vi gör teckentabell

	-2		0		$1/2$	
$(x - 1/2)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{(x-1/2)(x+2)}{x}$	$-$	0	$+$	$\not\exists$ def. $-$	0	$+$

Så olikheten är uppfylld då

$-2 < x < 0$ eller $x > 1/2$

<u>Svar:</u> $x \in (-2, 0) \cup (1/2, \infty)$

5 b) $|2x-3| \geq 4 \iff$

$2x-3 \geq 4$ eller $2x-3 \leq -4$

- $2x-3 \geq 4 \iff 2x \geq 7 \iff x \geq 7/2$
- $2x-3 \leq -4 \iff 2x \leq -1 \iff x \leq -1/2$

<u>Svar:</u> $x \in (-\infty, -1/2] \cup [7/2, \infty)$

(6) $z = 1 + i\sqrt{3}$. Då är

$|z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$, så $z = 2\left(1/2 + i\,\sqrt{3}/2\right)$

dvs $z = 2\left(\cos \pi/3 + i \sin \pi/3\right) = 2e^{i\pi/3}$

$w = \sqrt{\frac{3}{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}$, så

$|w| = \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, dvs

$w = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos \pi/6 + i \sin \pi/6\right)$

$= \sqrt{2}\, e^{i\pi/6}$

$$\frac{z^{12}}{w^{21}} = \frac{\left(2e^{i\pi/3}\right)^{12}}{\left(\sqrt{2}\,e^{i\pi/6}\right)^{21}} =$$

$$= \frac{2^{12}}{\left(2^{1/2}\right)^{21}} \frac{e^{i\,12\pi/3}}{e^{i\,21\pi/6}} = \frac{2^{12}}{2^{21/2}} \frac{e^{i4\pi}}{e^{i\left(\frac{24\pi}{6} - \frac{3\pi}{6}\right)}}$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{2^{12}}{2^{1/2} \cdot 2^{10}} \frac{e^{0i}}{e^{-i\pi/2}} = \frac{2^2}{2^{1/2}} \cdot 1 \cdot e^{i\pi/2}$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos \pi/2 + i \sin \pi/2\right) = 2\sqrt{2}\, i$$

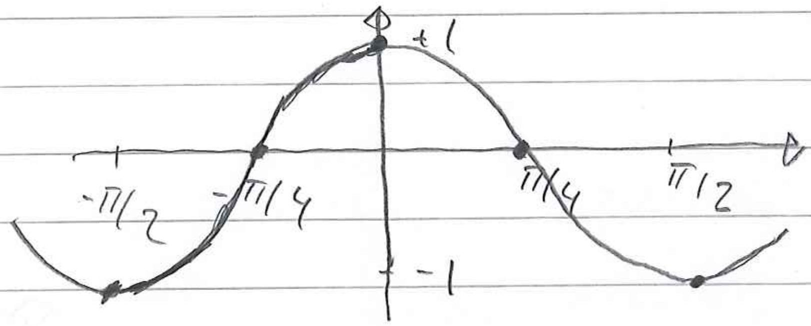
(*) Funktionen $e^{it} = (\cos t + i \sin t)$ är periodisk med periodlängd 2π

SVAR: $2\sqrt{2}\, i$

7 a) $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x =$

$= \cos 2x$

Vi skissaren grafen $y = \cos 2x$



Det största intervall I, $-\pi/4 \in I$, där f är injektiv är det slutna intervallet

$I = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, (enligt figur)

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos^2(-\pi/2) - \sin(-\pi/2)^2 = 0 - (-1)^2 = -1$

$f(0) = \cos^2(0) - \sin^2(0) = 1$

så $f : I \to [-1, 1]$ är också surjektiv.

b) $x = f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \iff f(x) = (\sqrt{3}/2)$

$\iff \cos(2x) = (\sqrt{3}/2)$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$

$\iff 2x = -\pi/6 \iff x = -\pi/12$

Svar: a) $I = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. b) $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{12}$

8. a) Enligt derivatans definition är

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Så, om f är deriverbar i $x = x_0$, existerar detta gränsvärde och

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \to f'(x_0) \text{ då } \Delta x \to 0,$$

dvs

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \approx f'(x_0) \text{ då } |\Delta x| \text{ litet}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x, \quad |\Delta x| \text{ litet.}$$

Detta är formeln för linjär approximation av $f(x)$ nära punkten $x = x_0$.

b) $f(x) = x^{10}$, $f'(x) = 10x^9$

Med $x_0 = 1$ och $\Delta x = 0.02$ fås

$$(1.02)^{10} = f(1.02) = f(1 + 0.02)$$

$$\approx f(1) + f'(1) \cdot (0.02) = 1 + 10 \cdot 0.02$$

$$= 1 + 0.2 = 1.2.$$

Svar: a) se ovan b) $(1.02)^{10} \approx 1.2$

Vi undersöker

9. $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

För

$n=1$ fås $\sum_{k=0}^{1} (-1)^k \binom{1}{k} = \binom{1}{0} - \binom{1}{1} = 1 - 1 = 0$

$n=2$ fås $\sum_{k=0}^{2} (-1)^k \binom{2}{k} = \binom{2}{0} - \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 1 - 2 + 1 = 0$

$n=3$ fås $\sum_{k=0}^{3} (-1)^k \binom{3}{k} = \binom{3}{0} - \binom{3}{1} + \binom{3}{2} - \binom{3}{3} = 1 - 3 + 3 - 1 = 0$

Summorna blir summor över raderna i Pascals triangel med alternerande tecken

$1 - 1 = 0$

$1 - 2 + 1 = 0$

$1 - 3 + 3 - 1 = 0$

$1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0$

$1 - 5 + 10 - 10 + 5 - 1 = 0$

osv.

Enklaste beviset för att $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ för alla $n = 1, 2, 3 \ldots$ är med hjälp av binomialsatsen:

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1)^{n-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

V.S.B.