Lösningsförslag till tentamen i Matematik Baskurs 7 jan. 2016

1. Beräkna det exakta värdet av $\cos\frac{\pi}{12}$

Lösn. Vi vet att för alla $t \in \mathbb{R}$ gäller

$$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1,$$

vilket innebär $\cos^2 t = \frac{1}{2}(\cos 2t + 1)$

Alltså, $\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) = \frac{\sqrt{3}+2}{4}.$

Vi vet att $\cos\frac{\pi}{12} > 0$.

Alltså, $\cos\frac{\pi}{12} = +\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$.

---

2. Lös ekvationen $({}^{10}\log x)^2 + {}^{10}\log(x^2) + {}^{10}\log(2x) = {}^{10}\log 2 - 2$

Lösn. Ekvationen har mening bara för $x > 0$.

För $x > 0$ är ekvationen ekvivalent med

$$({}^{10}\log x)^2 + 2\,{}^{10}\log x + {}^{10}\log x + \cancel{{}^{10}\log 2} = \cancel{{}^{10}\log 2} - 2 \iff$$

(beteckna $t := {}^{10}\log x$)

$$t^2 + 3t + 2 = 0$$

$t = -1$ eller $t = -2$.

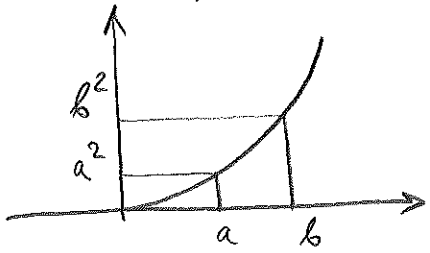
${}^{10}\log x = -1 \iff x = \frac{1}{10}$

${}^{10}\log x = -2 \iff x = \frac{1}{100}$

Svar: $x = \frac{1}{10}$ eller $x = \frac{1}{100}$.

3. Lös olikheten $\sqrt{x} - 1 \geq \sqrt{x-9}$

Lösn. Alla termer i olikheten är definierade om och endast om $x \geq 9$.
För $x \geq 9$, $\sqrt{x} \geq 3 \Rightarrow$ både höger och vänsterled är positiva.
För positiva x är funktionen $y = x^2$ växande.
Alltså, $b \geq a \iff b^2 \geq a^2$ för $a \geq 0, b \geq 0$



Vår olikhet är alltså ekvivalent med $(\sqrt{x}-1)^2 \geq x - 9$
$\iff 2\sqrt{x} \leq 10 \iff \sqrt{x} \leq 5 \iff$
$0 \leq x \leq 25$.

Kom ihåg att vi jobbar med $x \geq 9$.

Svar: $9 \leq x \leq 25$.

---

4. Lös ekvationen $x^2 + 2|x+1| = 5$

Lösning Fall 1: $x \geq -1$. Då $x+1 \geq 0$, och $|x+1| = x+1$.
Ekvationen är ekvivalent med $x^2 + 2x - 3 = 0 \iff$
$x = -3$ eller $x = 1$, varav bara $x = 1$ ligger i $[-1, \infty)$.

Fall 2: $x < -1$. Här $x+1 < 0$, och $|x+1| = -x-1$.
Ekv. är ekviv. med $x^2 - 2x - 7 = 0 \iff$
$x = 1 + 2\sqrt{2}$ eller $x = 1 - 2\sqrt{2}$.
Roten $x = 1 + 2\sqrt{2} > -1$ ligger inte i interv. $x < -1$.
Eftersom $\sqrt{2} > 1$, så $x = 1 - 2\sqrt{2} < 1 - 2 = -1$, och detta är en rot.

Svar: $x = 1$ eller $x = 1 - 2\sqrt{2}$.

5. Bestäm koefficienten framför x^{-5} i utvecklingen av $\left(2x - \frac{1}{x^3}\right)^7$.

Lösning: Enligt binomialsatsen,

$$\left(2x - \frac{1}{x^3}\right)^7 = \sum_{k=1}^{7} \binom{7}{k} (2x)^k (-x^{-3})^{7-k} = \sum_{k=1}^{7} \binom{7}{k} 2^k (-1)^{7-k} \cdot x^{k-3(7-k)}$$

Vi söker k sådan att $k - 3(7-k) = -5$, vilket ger $k = 4$. Motsvarande koefficient är

$$\binom{7}{4} 2^4 (-1)^{7-4} = -\frac{7!}{3!\,4!}\,2^4 = -\frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{3!} \cdot 2^4 = -35 \cdot 2^4.$$

---

6. a) Skriv funktionen $y = f(x) = 5\sin x + 5\cos x$ på formen $y = A\sin(x+\varphi)$; $A, \varphi \in \mathbb{R}$.

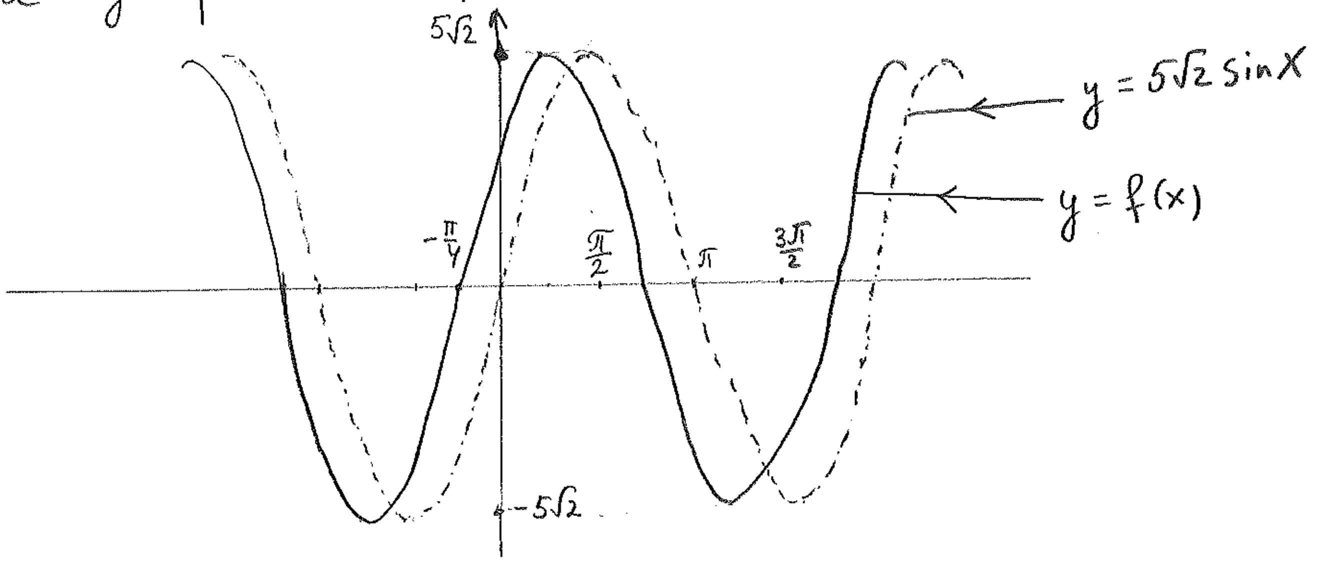
Lösn. $\sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$.

$$f(x) = 5\sqrt{2}\left(\frac{5}{5\sqrt{2}}\sin x + \frac{5}{5\sqrt{2}}\cos x\right) = 5\sqrt{2}\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos\varphi}\sin x + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\sin\varphi}\cos x\right)$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

$$f(x) = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cos x\right) = 5\sqrt{2}\,\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

b) skissa grafen av $f(x)$



7. Hur många termer skall medtagas i summan $49+47+45+\dots$ för att summan skall bli a) 600 b) så stor som möjligt

Lösn. a) Termerna i summan ges av

$a_k = 49-2k, \quad k=0,1,2,\dots$ Summan av n termer är

$$\sum_{k=0}^{n-1}(49-2k) = 49\cdot n - 2\sum_{k=1}^{n-1}k = 49n - \cancel{2}\frac{n(n-1)}{\cancel{2}} =$$

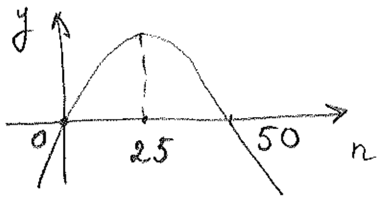
$$= -n^2+50n.$$

Vi vill att summan är 600.

$$-n^2+50n = 600 \iff n=20 \text{ eller } n=30.$$

Svar a) : $n=20$ eller $n=30$.

b) Vi vill att summan, d.v.s. $-n^2+50n$, blir så stor som möjligt.



$y = -n^2+50n = -n(n-50)$ – parabel

Maximum antas i $n=25$.

Svar: $n=25$.

---

8. Bestäm ett område där funktionen är inverterbar och bestäm inversen. Ange inversens definitionsmängd.

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$.

Lösn. Definitionsmängden för $f(x)$ är

$$D_f = (-\infty,-2)\cup(-2,\infty).$$

För $x \in D_f$ har vi: $y = f(x) = \dfrac{x-1}{x+2} \iff$

$$\iff \quad y(x+2) = x-1 \quad \iff \quad xy + 2y = x-1 \quad \iff$$

$x(y-1) = -1-2y$. För $y \neq 1$ är detta ekvivalent med

$$x = -\frac{2y+1}{y-1} = \frac{2y+1}{1-y}$$

Alltså, för varje $x \in D_f$ och $y \neq 1$, har ekvationen $f(x) = y$ en entydig lösning:

$$x = \frac{2y+1}{1-y} := f^{-1}(y).$$

Svar a) $f(x)$ är inverterbar på $D_f = (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$

$$f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{1-x}, \qquad D_{f^{-1}} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty).$$

b) $f(x) = \tan 2x$.

Funktionen $\tan x$ är strängt växande för $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ och π-periodisk. Då $f(x)$ är strängt växande för $2x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, d.v.s. $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$. Låt $D_f = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$. Då $f(x)$ är inverterbar på D_f.

Vidare, låt $y = \tan 2x$, $x \in D_f$.

då $2x = \arctan y$

$x = \frac{1}{2} \arctan y := f^{-1}(y)$.

$D_{f^{-1}} = (\infty, \infty)$.

Svar b). Ett område där $f(x)$ är inverterbar är $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$. Då $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \arctan x$, och $D_{f^{-1}} = (-\infty, \infty)$.

9. Visa att för $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n-1$ gäller

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

Lösn. $$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k+1)!\,(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!\,k!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!\,k!} = \frac{(n-1)!\left((n-k-1)!\,k! + (n-k)!\,(k-1)!\right)}{(n-k)!\,(n-k-1)!\cdot k!\,(k-1)!} =$$

$$\left[\begin{array}{l} k! = (k-1)!\cdot k \\ (n-k)! = (n-k-1)!\cdot(n-k) \end{array}\right]$$

$$= \frac{(n-1)!\left((n-k-1)!\,(k-1)!\cdot k + (n-k-1)!\,(k-1)!\cdot(n-k)\right)}{(n-k)!\,(n-k-1)!\,k!\,(k-1)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!\,\left(k + (n-k)\right)}{(n-k)!\,k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$