Lösningsförslag till Reglerteknik AK Tentamen 2016–01–08

Uppgift 1a

$$\textbf{Svar:} \quad y(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 1 - e^{-2(t-1)}, & t \geq 1 \end{cases}.$$

Uppgift 1b

Svar:

$$G_{ry}(s) = \frac{F_2(s)G(s)}{1 + F_1(s)F_2(s)G(s)}, \quad G_{lu}(s) = \frac{-F_1(s)F_2(s)G(s)}{1 + F_1(s)F_2(s)G(s)}.$$

Uppgift 1c

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s+1} + \frac{4}{s-2} + \frac{1}{s-1} = \frac{6s^2 - 4s - 4}{(s+1)(s-2)(s-1)}$$

Svar: Polerna till $G(s)$ är lika med egenvärdena till A, d.v.s. $-1, 2, 1$. Nollställena ges av

$$\frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}.$$

Uppgift 2a

Polerna ligger i $\{-1, -\varepsilon + i, -\varepsilon - i\}$, med motsvararande dämpning

$$\zeta = \frac{\epsilon}{\sqrt{1 + \epsilon^2}}$$

För stora ε är den reella polen klart dominant och dämpningen är nära 1. För små ε minskar dämpningen och stegsvaret blir mer oscillativ. Detta medför att stegsvar C hör till $\varepsilon = \frac{3}{2}$. Dämpningen (cosinus av vinkeln mot negativa reella axeln) minskar allteftersom de komplexa polerna rör sig mot den imaginära axeln, dvs. när ε minskar. Detta ger att D hör till $\varepsilon = \frac{1}{3}$, B till $\varepsilon = \frac{1}{2}$ och A till $\varepsilon = \frac{2}{3}$.

Svar: $\varepsilon_A = \frac{2}{3}, \varepsilon_B = \frac{1}{2}, \varepsilon_C = \frac{3}{2}$ och $\varepsilon_D = \frac{1}{3}$.

Uppgift 2b

Eftersom

$$G_{u,\theta}(s) = \frac{1}{s}G(s)$$

får vi

$$|G_{u,\theta}(i\omega)| = \frac{1}{\omega}|G(i\omega)|, \quad \arg G_{u,\theta}(i\omega) = \arg G(i\omega) - \frac{\pi}{2}.$$

Detta medför att Nyquistkurvan vrids -90^o samt avståndet till origo skalas med $1/\omega$.

Uppgift 2c

Återkoppling med hjälp av både θ och $\dot{\theta}$ motsvarar kaskadreglering, och konstruktionen av regulatorn kan förenklas om den inre kretesen är snabbare än den yttre. Man kan också reagera tidigare på störningar genom att återkoppla från $\dot{\theta}$. En nackdel är att man måste ha en extra sensor.

Uppgift 3a

Använd

- $\beta = 0.1$ ger en maximal fasavancering (Figur 5.13 i kursboken) på 55 grader, d.v.s det urspungliga systemet har 5 grader i fasmarginal eftersom fasmarginalen efter kompensering är 60 grader.
- $\tau_D = 1/(\omega_c\sqrt{\beta}) \Rightarrow \omega_c = 1/(\tau_D\sqrt{\beta}) = 1/(3.2\sqrt{0.1}) = 1$ rad/s
- $K = \sqrt{\beta} = 0.32$, eftersom $|G(\omega_c)| = 1$ (samma snabbhet som för $F = 1$)

Svar: $\omega_c = 1$ rad/s och $\varphi_m = 5$ grader för det okompenserade systemet $G(s)$.

Uppgift 3b

Vi vill nu fasavancera 27.5 grader vid $\omega_c = 1$ per leadlänk, vilket ungefär motsvarar $\bar{\beta} = 0.35$, $\bar{\tau}_D = 1/(\omega_c\sqrt{\beta}) = 1.7$ och $K = \bar{\beta} = 0.35$ (2 länkar).
Svar: $\bar{\beta} = 0.35$, $\bar{\tau}_D = 1.7$ och $\bar{K} = 0.35$.

Uppgift 3c

Fasen för $F_{PI}(i\omega)$ vid $\omega_c = 1$ är $-\arctan(1/\tau_I) = -9.5$ grader.
Svar: Fasmarginalen minskas med 9.5 grader.

Uppgift 4a

$$\det(sI - (A - BL)) = s^2 + l_2 s + l_1 = (s+2)^2 = s^2 + 4s + 4, \quad \Rightarrow L = [4\ 4].$$

Slutet system:

$$A - BL = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Stationärt:

$$y = -C(A - BL)^{-1} B l_0 r = 0.25\, l_o r, \quad \Rightarrow l_0 = 4.$$

Svar: $u(t) = -[4\ 4]x(t) + 4r(t)$.

Uppgift 4b

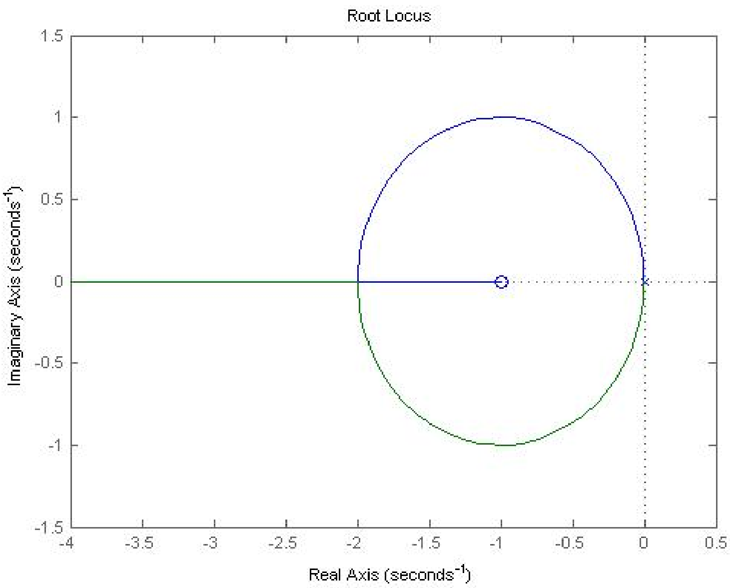
$$\det(sI - (A - KBL)) = s^2 + l_2 s + l_1 = (s+2)^2 = s^2 + K(4s+4)$$

Rotort med

$$\begin{aligned} P(s) &= s^2 \\ Q(s) &= 4(s+1). \end{aligned}$$

- $n = 2$ startpunkter i ($p_1 = 0$ and $p_2 = 0$), $m = 1$ ändpunkt ($q_1 = -1$)
- $n - m = 1$ asymptot med riktning π.
- Reella axeln till vänster om -1
- $s = i\omega$ saknar lösning eftersom $s^2 + K(4s+4)$ har positiva koefficienter (stabilt för alla $K > 0$)

Rotort:



Svar: Stabilt för alla $K > 0$, oscillativt (komplexa poler) för $0 < K < \bar{K}$, där $\bar{K} = 1$ (dubbelrot i -2). $\bar{K}$ krävs inte för att få rätt lösning.

Uppgift 4c

Studera (med L från Uppgift 4a))

$$G_o(s) = L[sI - A]^{-1}B = \frac{4(s+1)}{s^2}$$

(samma överföringsfunktion som för rotorten i Uppgift 4b, d.v.s. överföringsfunktionen från $u(t)$ till $y_c(t) = Lx(t)$). Stabilitet bestäms av det återkopplade systemet

$$Y_c(s) = G_o(s)U(s), \quad U(s) = -e^{-sT}Y_c(s).$$

Förenklade Nyquistkriteriet kan användas eftersom $G_o(s)$ har två poler i 0. $G_o(s)$ har skärfrekvens $\omega_c = 4.12$ rad/s och fasmarginal $\varphi_m = 76$ grader. Detta fås genom att analysera $|G_o(i\omega)| = 1$. Tidsförskjutningen ger en negativ fasförskjutning på $-\omega T$ radianer, vilket medför att systemet är stabilt om $4.12T < 1.13$, dvs $T < 0.32$ s.
Svar: Systemet är stabilt om $T < 0.32$ s.

Exercise 5

(a) Det slutna systemet blir

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -lx(t), \qquad x(0) = x_0, \\ y(t) &= x(t). \end{aligned}$$

med lösning

$$y(t) = x_0 e^{-lt}, u(t) = -lx(t) = -ly(t) = -lx_0 e^{-l}t.$$

Det återkopplade systemt är stabilt för $l > 0$. Bestäm nu

$$J(l) = \int_0^\infty \left[y(\tau)^2 + u(\tau)^2\right] e^{2\alpha\tau} \mathrm{d}\tau,$$

genom att substituera lösningen

$$\begin{aligned} J(l) &= \int_0^\infty \left[x_0^2 e^{2(\alpha-l)\tau} + l^2 x_0^2 e^{2(\alpha-l)\tau}\right] \mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^\infty x_0^2(1+l^2)e^{2(\alpha-l)\tau}\mathrm{d}\tau \\ &= \left| x_0^2(1+l^2)\frac{e^{2(\alpha-l)\tau}}{2(\alpha-l)} \right|_0^\infty = \frac{x_0^2(1+l^2)}{2(l-\alpha)}, \quad l > \alpha. \end{aligned}$$

Observera att $J(l) = \infty$ om $l \leq \alpha$. Nu är

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}J(l) = 0, \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\frac{x_0^2(1+l^2)}{2(l-\alpha)} = 0, \Rightarrow$$

$$\frac{2l(l-\alpha) - (1+l^2)}{(l-\alpha)^2} = 0, \Rightarrow l^2 - 2\alpha l - 1 = 0.$$

med lösningar

$$l_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 1}$$

där bara

$$l_1 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1},$$

uppfyller kravet $l_1 > \alpha$.
Svar: Det optimal valet av l är $l_1 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1}$.

(b) Motsvarande pol för det återkopplade systemet är

$$p(\alpha) = -[\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1}],$$

För små värden på α är det återkopplade systemets polen nära -1. För stora värden på α så är polen ungefär -2α, d.v.s. proportionell mot α.