KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2016-01-11

Del A

1. Betrakta funktionen f som ges av $f(x) = x - 2\arctan x$.

   A. Bestäm definitionsmängden till f.
   B. Bestäm de intervall där f är växande respektive avtagande.
   C. Bestäm alla lokala extrempunkter till f.
   D. Bestäm alla asymptoter till funktionsgrafen $y = f(x)$.
   E. Skissa med hjälp av ovanstående funktionsgrafen $y = f(x)$.

Lösning. A. Vi ser att $f(x)$ är definierat för alla reella tal x så defintionsmängden är $\mathbf{R}$.

B och C. Vi deriverar och får $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{1+x^2} = \dfrac{x^2-1}{1+x^2}$ som existerar för alla x och är noll då $x = \pm 1$ De kritiska punkterna är alltså $x = \pm 1$.

Teckenstudium av derivatan:

Om $x < -1$ så är $f'(x)$ positivt. Det följer att f är strängt växande här.

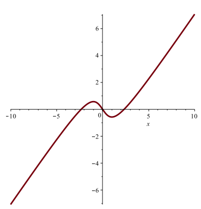
Om $-1 < x < 1$ så är $f'(x)$ negativt. Det följer att f är strängt avtagande här.

Om $x > 1$ så är $f'(x)$ positivt. Det följer att f är strängt växande här.

Det följer av detta att f har en lokal maxpunkt i $x = -1$ och en lokal minpunkt i $x = 1$ och inga andra extrempunkter.

D. Eftersom $\lim_{x\to\pm\infty} \arctan x = \pm\pi/2$ ser vi att f har asymptoten $y = x - \pi$ i oändligheten och asymptoten $y = x + \pi$ i minus oändligheten.

E. Vi kan nu skissa kurvan.



□

Svar: A. Alla x. B. Strängt växande på $x \leq -1$. Strängt avtagande på $-1 \leq x \leq 1$. Strängt växande på $x \geq 1$. C. Lokalt max i $x = -1$ och lokalt min i $x = 1$. D. $y = x - \pi$ är asymptot i oändligheten och $y = x + \pi$ är asymptot i minus oändligheten. E. Se ovan.

2. Beräkna nedanstående integraler.

A. $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ (använd gärna substitutionen $u = 1 + e^x$)

B. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2 - 3x - 4}$ (använd gärna partialbråksuppdelning)

Lösning. A. Med substitutionen $u = 1 + e^x$, där $e^x\,dx = du$ och de nya gränserna blir 2 resp 4, får vi

$$\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \int_2^4 \frac{1}{u}\,du = [\ln u]_2^4 = \ln 2.$$

B. Nämnaren kan faktoriseras som $x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4)$ så vi kan dela upp integranden i partialbråk

$$\frac{1}{x^2 - 3x - 4} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1}$$

där vi kan bestämma konstanterna till $A = 1/5$ och $B = -1/5$. Vi kan därför beräkna integralen enligt

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2 - 3x - 4} = \int_1^2 \left(\frac{1/5}{x-4} - \frac{1/5}{x+1}\right)dx = \frac{1}{5}[\ln|x-4| - \ln|x+1|]_1^2 = \frac{2}{5}\ln\frac{2}{3}.$$

$\square$

Svar: A. $\ln 2$

B. $\frac{2}{5}\ln\frac{2}{3}$

3. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$2y''(t) - 20y'(t) + 50y(t) = t$$

som också uppfyller initialvillkoren $y(0) = 1/125$ och $y'(0) = 1$.

Lösning. Allmänna lösningen y till differentialekvationen har strukturen $y = y_h + y_p$ där y_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation och y_p är någon partikulärlösning till den givna differentialekvationen.

Vi bestämmer först y_h. Den karaktäristiska ekvationen $2r^2 - 20r + 50 = 0$ har lösningen $r = 5$, så vi får att

$$y_h(t) = (A + Bt)e^{5t}.$$

Eftersom högerledet är ett förstagradspolynom ansätter vi $y_p(t) = ct + d$. Dess derivata är då c och insättning av detta i differentialekvationen ger $-20c + 50(ct + d) = t$ varur fås att $c = 1/50$ och $d = 1/125$

Den allmänna lösningen till differentialekvationen är alltså

$$y(t) = (A + Bt)e^{5t} + \frac{t}{50} + \frac{1}{125}.$$

Villkoret $y(0) = 1/125$ ger direkt att vi måste ha $A = 0$. Villkoret $y'(0) = 1$ ger sedan att $B = 49/50$.

Den lösning till differentialekvationen som uppfyller initialvillkoren är därför

$$y(t) = \frac{49t}{50}e^{5t} + \frac{t}{50} + \frac{1}{125}.$$

□

Svar: $y(t) = \frac{49t}{50}e^{5t} + \frac{t}{50} + \frac{1}{125}$.

DEL B

4. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{2+8x^2}\,dx.$

   (För full poäng krävs att integralen beräknas exakt, men delpoäng kan ges för en approximativ beräkning. Svaret ska förenklas så långt som möjligt.)

   Lösning. Vi beräknar integralen med primitiv funktion:

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{2+8x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{1}{1+(2x)^2}\,dx = \frac{1}{4}[\arctan(2x)]_0^{1/2} = \frac{\pi}{16}.$$

$\square$

Svar: $\pi/16$

5. Betrakta ekvationen $e^x + \arcsin x = 0$.
   A. För vilka x är uttrycket $e^x + \arcsin x$ definierat?
   B. Visa att ekvationen $e^x + \arcsin x = 0$ har *exakt en* lösning.
   C. Finn ett närmevärde till lösningen med ett fel på högst 0.5.

Lösning. A. Medan e^x är definierat för alla x så är $\arcsin x$ bara definierat då $-1 \leq x \leq 1$. Vi ser alltså att uttrycket $e^x + \arcsin x$ är definierad för x sådana att $-1 \leq x \leq 1$.

B och C. Sätt $f(x) = e^x + \arcsin x$. Ekvationen i uppgiften kan då skrivas $f(x) = 0$. Definitionsmängden till f är $-1 \leq x \leq 1$ och f är kontinuerlig på hela det slutna och begränsade intervallet. Vi konstaterar att $f(-1) = e^{-1} - \pi/2$ som är mindre än 0 och att $f(1) = e^1 + \pi/2$ som är större än 0. Med hjälp av satsen om mellanliggande värden får vi från ovanstående att det finns en punkt x^* mellan -1 och 1 sådan att $f(x^*) = 0$. I själva verket måste x^* med ett likadant argument ligga mellan -1 och 0 eftersom $f(0) = 1$ som är större än 0. En approximation av x^* som har ett fel på högst 0.5 är därför -0.5.

Eftersom $f'(x) = e^x + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ som är positivt i hela det inre av intervallet så är f strängt växande och kan därför inte ha mer än ett nollställe.

Det följer alltså att ekvationen har exakt en lösning. Ett närmevärde till lösningen är -0.5. $\square$

Svar: Se lösningen. Närmevärde -0.5

6. Ett område som ligger på ena sidan om ett plant snitt genom en sfär kallas en *sfärisk kalott*.
   A. Beräkna volymen av den sfäriska kalott man får genom att låta området mellan kurvan $y = \sqrt{100 - x^2}$ och x-axeln, på intervallet $10 - h \leq x \leq 10$, rotera runt x-axeln (vi antar att $0 < h < 10$).
   B. En sfär med radie 10 meter fylls med vatten i en takt av 0.2 kubikmeter per minut. Med vilken hastighet stiger vattenytan i det ögonblick då vattendjupet h (på det djupaste stället) är 2 meter? *(Tips: från uppgift A får du att sambandet mellan vattenvolymen V och vattendjupet h ges av $V = 10h^2\pi - h^3\pi/3$.)*

Lösning. A. Formeln för rotationsvolymer ger att volymen V ges av

$$V = \pi \int_{10-h}^{10} (100 - x^2)\,dx = 10h^2\pi - \frac{h^3\pi}{3}.$$

B. Formeln för vattenvolymen i sfären när djupet är h får vi från uppgift A. Vattenvolymen är

$$V = 10h^2\pi - \frac{h^3\pi}{3}.$$

Här ska man komma ihåg att både V och h beror på tiden t, så om vi deriverar denna formel med avseende på t får vi

$$\frac{dV}{dt} = 20h\pi\frac{dh}{dt} - h^2\pi\frac{dh}{dt}.$$

Vi vet att ändringstakten av volymen är 0.2 kubikmeter per minut, så $dV/dt = 0.2$. Det som söks är dh/dt i det ögonblick då $h = 2$. Detta kan vi nu räkna ut, för när $h = 2$ får vi

$$0.2 = 40\pi\frac{dh}{dt} - 4\pi\frac{dh}{dt},$$

så

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{180\pi} \text{ meter per minut.}$$

$\square$

Svar: A.$10h^2\pi - \frac{h^3\pi}{3}$
B. $1/180\pi$ meter per minut

DEL C

7. Denna uppgift handlar om teorin för kontinuitet och deriverbarhet.
   A. Definiera vad det betyder att en funktion är kontinuerlig i en punkt a.
   B. Definiera vad det betyder att en funktion är deriverbar i en punkt a.
   C. Bevisa att en funktion som är deriverbar i a också måste vara kontinuerlig i a.
   D. Ge exempel som visar att en funktion kan vara kontinuerlig utan att vara deriverbar.

Lösning. Se boken, definition 4 i kapitel 1.4, definition 4 i kapitel 2.2, sats 1 i kapitel 2.3, exempel 4 i kapitel 2.2.

□

Svar: Se boken.

8. Betrakta funktionen f given av $f(x) = x^2 + \int_0^x \sin^2 t\, dt$.

   A. Beräkna Taylorpolynomet av grad 2 till f kring punkten $x = 0$.
   B. Ange feltermen och visa att den är begränsad om $|x| \le 1$.
   C. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2}$.

Lösning. Med hjälp av huvudsatsen och kedjeregeln mm får vi att
$f'(x) = 2x + \sin^2 x$ och $f'(0) = 0$,
$f''(x) = 2 + 2\sin x \cos x$ och $f''(0) = 2$,
$f'''(x) = 2\cos 2x$.
Eftersom dessutom $f(0) = 0$ får vi det sökta Taylorpolynomet som $p(x) = x^2$.

Feltermen är $\dfrac{2\cos 2c}{3!}x^3$ för något c mellan 0 och x. Eftersom $|\cos 2c| \le 1$ får vi att absolutbeloppet av feltermen är $\le 2/3! = 1/3$ när $|x| \le 1$. Den är alltså begränsad.

Med hjälp av ovanstående får vi att

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \frac{2\cos 2c}{3!}x^3}{x^2} = 1.$$

□

Svar: A. $p(x) = x^2$. B. Se lösningen. C. 1

9. Finn tal a och b sådana att $a \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq b$. För full poäng krävs, förutom ett korrekt resonemang, att $b - a \leq 0.2$.

Lösning. Vi har först att $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Med hjälp enkla uppskattningar liknande de som görs i beviset för Cauchys integralkriterium får vi sedan att

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx < \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{1}{9} + \int_3^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx.$$

Sätter vi ihop dessa obeservationer och beräknar integralen (dess värde är $1/3$), får vi

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{4} + \frac{4}{9}.$$

Eftersom $1 + 1/4 + 1/3 = 19/12 = 1.58\ldots$ och $1 + 1/4 + 4/9 = 61/36 = 1.69\ldots$ så kan vi välja $a = 1.58$ och $b = 1.7$ och konstatera att

$$1.58 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 1.7.$$

$\square$

Svar: Se lösningen.