Institutionen för matematik

SF1626 Flervariabelanalys
Tentamen
Tisdagen den 12 januari 2016

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Betrakta funktionen $f(x,y) = \dfrac{1}{1+(1-x)^2+y^2}$.
   (a) Beräkna gradienten till f i origo. **(1 p)**
   (b) Vilken information om utseendet på grafen till f i en omgivning till origo ges av riktningen respektive längden av gradienten till f i origo? **(2 p)**
   (c) Har funktionen f ett minimum över hela xy-planet? **(1 p)**

2. (a) Formulera Greens formel[1] inklusive alla förutsättningar. **(2 p)**
   (b) Använd Greens formel för att beräkna kurvintegralen
$$\int_T (x-2x^2y)\,dx + (2xy^2-y)\,dy$$
   där T är randen till parallelltrapetsen med hörn i punkterna $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,4)$ och $(0,5)$ genomlöpt moturs. **(2 p)**

3. Den plana kurva C som ges av ekvationen $27y^2 = x(x-9)^2$ kan parametriseras genom $\mathbf{r}(t) = (3t^2, 3t-t^3)$ där t genomlöper hela den reella tallinjen.
   (a) Kontrollera att parameterkurvan är en del av kurvan C, det vill säga att punkterna på den uppfyller ekvationen för C. **(1 p)**
   (b) Beräkna hastigheten $\mathbf{r}'(t)$ för den parametriserade kurvan. **(1 p)**
   (c) Ställ upp den integral i parametern t som beräknar längden av den ögla som ges av intervallet $-\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3}$. Förenkla integranden så långt som möjligt. **(2 p)**

---

[1] Green's Theorem in the plane.

DEL B

4. Beräkna dubbelintegralen
$$\iint_D xy\,dx\,dy$$
där D är området som i polära koordinater ges av olikheterna
$$\begin{cases} 0 \le r \le \sin 2\theta, \\ 0 \le \theta \le \pi/2. \end{cases}$$
(4 p)

5. (a) Låt $f(x, y)$ vara en funktion av två variabler. Förklara vad som menas med att en punkt (x_0, y_0) är en stationär punkt, en lokal maxpunkt, respektive en lokal minpunkt. **(2 p)**

   (b) Funktionen $f(x, y) = e^{x - x^3/3 - y^2}$ har stationära punkter i $(1, 0)$ och $(-1, 0)$. Avgör om dessa är lokala maxpunkter, lokala minpunkter, eller ingetdera. **(2 p)**

6. Kurvan C är en sammanhängande del av hyperbeln $xy = 1$ från punkten $(1, 1)$ till punkten P. Bestäm P då
$$\int_C (2x + y)\,dx + (x - 8y)\,dy = 3.$$
(4 p)

Var god vänd!

Del C

7. Betrakta ekvationen $F(x,y)=0$ där $F(x,y)=xe^y+ye^x$.
   (a) Visa att det finns en funktion g med $g(0)=0$ sådan att $F(x,g(x))=0$ för x nära 0. **(1 p)**
   (b) Beräkna Taylorpolynomet av grad två för g vid $x=0$. **(3 p)**

8. Funktionen f ges av
$$f(t)=\iint_D \exp\left(\frac{tx}{y^2}\right)\,dxdy$$
där $t>0$ och området D definieras av att $t\le x\le 2t$ och $t\le y\le 2t$. Visa att
$$f(t)=Ct^2$$
för någon konstant C. **(4 p)**

9. Låt $g(r)$ vara en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion med $g'(4)=1$. Beräkna integralen
$$\iint_D \left(f''_{xx}+f''_{yy}\right)\,dxdy,$$
där $f(x,y)=g\left(x^2+y^2\right)$ och D är en cirkelskiva med radie 2 kring origo. **(4 p)**