



KTH Teknikvetenskap

**SF1626 Flervariabelanalys**  
**Lösningsförslag till tentamen 2016-01-12**

DEL A

1. Betrakta funktionen  $f(x, y) = \frac{1}{1 + (1 - x)^2 + y^2}$ .

- (a) Beräkna gradienten till  $f$  i origo. **(1 p)**
- (b) Vilken information om utseendet på grafen till  $f$  i en omgivning till origo ges av riktningen respektive längden av gradienten till  $f$  i origo? **(2 p)**
- (c) Har funktionen  $f$  ett minimum över hela  $xy$ -planet? **(1 p)**

**Lösningsförslag.**

- (a) Vi får de partiella derivatorna

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2(x-1)}{(1+(1-x)^2+y^2)^2} \quad \text{och} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2y}{(1+(1-x)^2+y^2)^2}$$

vilket ger gradienten

$$\text{grad } f(x, y) = \left( -\frac{2(x-1)}{(1+(1-x)^2+y^2)^2}, -\frac{2y}{(1+(1-x)^2+y^2)^2} \right).$$

När vi sätter in  $(x, y) = (0, 0)$  får vi

$$\text{grad } f(0, 0) = \left( -\frac{2(0-1)}{(1+(1-0)^2+0^2)^2}, -\frac{2 \cdot 0}{(1+(1-0)^2+0^2)^2} \right) = \left( \frac{2}{4}, 0 \right) = \left( \frac{1}{2}, 0 \right).$$

- (b) Eftersom funktionen är differentierbar ger gradientens riktning information om i vilken riktning grafen lutar brantast uppåt. I det här fallet är det i positiv  $x$ -led. Beloppet av gradienten ger den maximala riktningensderivatan, som i det här fallet är  $1/2$ . Det betyder att grafen till  $f$  har ett tangentplan som lutar med en maximal riktningskoefficient  $1/2$  och detta är i positiv  $x$ -led.
- (c) Funktionen är positiv över hela planet, men kan komma godtyckligt nära 0. Alltså finns inget minimum över hela planet.

**Svar.**

- (a)  $\text{grad } f(0, 0) = (1/2, 0)$ .
- (c) Funktionen har inget globalt minimum över hela  $xy$ -planet.

2. (a) Formulera Greens formel<sup>1</sup> inklusive alla förutsättningar. (2 p)  
 (b) Använd Greens formel för att beräkna kurvintegralen

$$\int_T (x - 2x^2y) dx + (2xy^2 - y) dy$$

där  $T$  är randen till parallelltrapetsen med hörn i punkterna  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(2, 4)$  och  $(0, 5)$  genomlöpt moturs. (2 p)

### Lösningförslag.

- (a) Om  $\mathbf{F} = (P, Q)$  är ett kontinuerligt deriverbart vektorfält i planet och  $D$  är ett begränsat område med en styckvis kontinuerligt deriverbar rand  $C$  så gäller

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

där  $C$  är positivt orienterad med avseende på  $D$ .

- (b) Enligt Greens formel kan kurvintegralen beräknas med hjälp av dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{\partial}{\partial x} (2xy^2 - y) - \frac{\partial}{\partial y} (x - 2x^2y) dx dy = \iint_D 2y^2 + 2x^2 dx dy$$

där  $D$  är den givna parallelltrapetsen. Vi kan beskriva  $D$  med olikheterna  $0 \leq x \leq 2$  och  $0 \leq y \leq 5 - x/2$ , vilket gör att vi kan beräkna dubbelintegralen med upprepad integration.

$$\begin{aligned} \iint_D 2y^2 + 2x^2 dx dy &= 2 \int_0^2 \int_0^{5-x/2} x^2 + y^2 dy dx = 2 \int_0^2 \left[ x^2y + \frac{y^3}{3} \right]_0^{5-x/2} dx \\ &= 2 \int_0^2 (5 - x/2)x^2 + \frac{(5 - x/2)^3}{3} dx = 2 \left[ \frac{5x^3}{3} - \frac{x^4}{8} - \frac{(5 - x/2)^4}{6} \right]_0^2 \\ &= 2 \left( \frac{40}{3} - 2 - \frac{4^4}{6} + \frac{5^4}{6} \right) = \frac{80 - 12 - 256 + 625}{3} = \frac{437}{3}. \end{aligned}$$

### Svar.

- (b) Kurvintegralens värde är  $437/3$ .

<sup>1</sup>Green's Theorem in the plane.

3. Den plana kurva  $C$  som ges av ekvationen  $27y^2 = x(x - 9)^2$  kan parametreras genom  $\mathbf{r}(t) = (3t^2, 3t - t^3)$  där  $t$  genomlöper hela den reella tallinjen.
- (a) Kontrollera att parameterkurvan är en del av kurvan  $C$ , det vill säga att punkterna på den uppfyller ekvationen för  $C$ . **(1 p)**
- (b) Beräkna hastigheten  $\mathbf{r}'(t)$  för den parametrerade kurvan. **(1 p)**
- (c) Ställ upp den integral i parametern  $t$  som beräknar längden av den ögla som ges av intervallet  $-\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3}$ . Förenkla integranden så långt som möjligt. **(2 p)**

**Lösningsförslag.**

- (a) Vi sätter in  $\mathbf{r}(t)$  i ekvationen och får vänsterledet

$$27(3t - t^3)^2 = 27(9t^2 - 6t^4 + t^6)$$

och högerledet

$$3t^2(3t^2 - 9)^2 = 3t^2(9t^4 - 54t^2 + 81) = 27(t^6 - 6t^4 + 9t^2).$$

Eftersom höger- och vänsterled är lika uppfyller parametreringen ekvationen och parameterkurvan är en del av  $C$ .

- (b) Hastigheten av parametreringen ges av derivatan med avseende på  $t$ . Vi får

$$\mathbf{r}'(t) = (6t, 3 - 3t^2).$$

- (c) För att beräkna längden av kurvan integrerar vi beloppet av  $\mathbf{r}'(t)$ . Vi får beloppet som

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}'(t)| &= 3\sqrt{(2t)^2 + (1 - t^2)^2} = 3\sqrt{4t^2 + 1 - 2t^2 + t^4} = 3\sqrt{1 + 2t^2 + t^4} \\ &= 3\sqrt{(1 + t^2)^2} = 3(1 + t^2). \end{aligned}$$

Längden av öglan blir

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |\mathbf{r}'(t)| dt &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 3(1 + t^2) dt = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 3(1 + t^2) dt = [3t + t^3]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \\ &= 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - (-3\sqrt{3}) - (-3\sqrt{3}) = 12\sqrt{3}. \end{aligned}$$

**Svar.**

- (b)  $\mathbf{r}'(t) = (6t, 3 - 3t^2)$ .
- (c) Öglans längd är  $12\sqrt{3}$  längdenheter.

## DEL B

4. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D xy \, dx \, dy$$

där  $D$  är området som i polära koordinater ges av olikheterna

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq \sin 2\theta, \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2. \end{cases}$$

(4 p)

**Lösningförslag.** När vi byter till polära koordinater får vi  $dx dy = r \, dr d\theta$ . Integranden blir  $xy = r^2 \cos \theta \sin \theta$  och gränserna ges av de givna olikheterna. Vi kan nu beräkna integralen med upprepad integration med början i  $r$ -led,

$$\begin{aligned} \iint_D xy \, dx \, dy &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin 2\theta} r^3 \sin \theta \cos \theta \, dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{r^4}{4} \sin \theta \cos \theta \right]_{r=0}^{r=\sin 2\theta} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin 2\theta)^4 \sin 2\theta}{4} d\theta = \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} (\sin 2\theta)^5 d\theta = \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 2\theta)^2 \sin 2\theta d\theta. \end{aligned}$$

Vi kan göra variabelbytet  $t = \cos 2\theta$  och får  $dt = -2 \sin 2\theta d\theta$ , vilket ger

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 2\theta)^2 \sin 2\theta d\theta &= -\frac{1}{16} \int_1^{-1} (1 - t^2)^2 dt = \frac{1}{16} \int_{-1}^1 1 - 2t^2 + t^4 dt \\ &= \frac{1}{16} \left[ t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{16} \left( 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{2}{16} \left( \frac{15 - 10 + 3}{15} \right) = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

**Svar.**  $\iint_D xy \, dx dy = \frac{1}{15}$

5. (a) Låt  $f(x, y)$  vara en funktion av två variabler. Förklara vad som menas med att en punkt  $(x_0, y_0)$  är en stationär punkt, en lokal maxpunkt, respektive en lokal minpunkt. **(2 p)**
- (b) Funktionen  $f(x, y) = e^{x-x^3/3-y^2}$  har stationära punkter i  $(1, 0)$  och  $(-1, 0)$ . Avgör om dessa är lokala maxpunkter, lokala minpunkter, eller ingetdera. **(2 p)**

**Lösningförslag.**

- (a)
- En *stationär punkt* är en punkt där gradienten är noll.
  - En *lokal maxpunkt* är en punkt där funktionen antar ett värde som är maximalt i någon cirkelskiva med centrum i punkten.
  - En *lokal minpunkt* är en punkt där funktionen antar ett värde som är minimalt i någon cirkelskiva med centrum i punkten.
- (b) För att avgöra om de är lokala max- eller minpunkter ser vi på andraderivatorna. Eftersom exponentialfunktionen är monotont växande kan vi lika gärna betrakta funktionen  $g(x, y) = x - x^3/3 - y^2$ . Den kvadratiske formen i Taylorpolynommet av grad två för  $g$  ges av matrisen

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

I punkten  $(1, 0)$  får vi matrisen

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

som är negativt definit, vilket visar att funktionen  $g$  har ett lokalt maximum i  $(1, 0)$ . För punkten  $(-1, 0)$  får vi matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

som är indefinit och punkten  $(-1, 0)$  är en sadelpunkt för  $g$  och därmed varken lokal maxpunkt eller lokal minpunkt.

Vi kan också arbeta direkt på funktionen  $f$  och får

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (1 - x^2)e^{x-x^3/3-y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{x-x^3/3-y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (-2x + (1 - x^2)^2)e^{x-x^3/3-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2y(1 - x^2)e^{x-x^3/3-y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (-2 + (-2y)^2)e^{x-x^3/3-y^2}$$

och när vi sätter in  $(1, 0)$  och  $(-1, 0)$  får vi

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} e^{2/3}, \text{ respektive } \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} e^{-2/3}$$

och samma analys som tidigare leder till samma slutsats.

**Svar.**

- (b)  $(1, 0)$  är en lokal maxpunkt och  $(-1, 0)$  är varken en lokal maxpunkt eller en lokal minpunkt.

6. Kurvan  $C$  är en sammanhängande del av hyperbeln  $xy = 1$  från punkten  $(1, 1)$  till punkten  $P$ . Bestäm  $P$  då

$$\int_C (2x + y) dx + (x - 8y) dy = 3.$$

(4 p)

**Lösningförslag.** Låt den sökta punkten vara  $(a, 1/a)$ . Vi kan parametrisera kurvan som  $\mathbf{r}(t) = (t, 1/t)$  och får  $d\mathbf{r} = (t, -1/t^2) dt$ . Därmed ges integralen av

$$\begin{aligned} \int_C (2x + y) dx + (x - 8y) dy &= \int_1^a (2t + \frac{1}{t}) dt + (t - \frac{8}{t})(-1/t^2) dt \\ &= \int_1^a 2t + 8t^{-3} dt = [t^2 - 4t^{-2}]_1^a = a^2 - 4a^{-2} - 1 + 4 = 3 + a^2 - 4a^{-2}. \end{aligned}$$

Villkoret leder till ekvationen

$$a^2 - 4a^{-2} = 0$$

som kan skrivas om som  $a^4 - 4 = 0$  i och med att  $a$  inte kan vara noll. Denna ekvation har fyra lösningar  $a = \pm\sqrt{2}$  och  $a = \pm i\sqrt{2}$ . Vi söker en positiv reell lösning och får därmed  $a = \sqrt{2}$ . Det betyder att den sökta punkten är  $P = (\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ .

Ett alternativt sätt att lösa uppgiften är att se att fältet  $\mathbf{F}(x, y) = (2x + y, x - 8y)$  är konservativt och att vi kan hitta en potential genom att först integrera i  $x$ -led och får  $\Phi(x, y) = x^2 + xy + g(y)$ . Derivering med avseende på  $y$  ger då  $x + g'(y) = x - 8y$ , och vi kan välja  $g(y) = -4y^2$ . Integralens värde kan nu beräknas som skillnaden i potential, dvs

$$\int_C (2x + y) dx + (x - 8y) dy = \Phi(P) - \Phi(1, 1).$$

Eftersom  $\Phi(1, 1) = 1^2 + 1 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = -2$  söker vi  $P = (a, 1/a)$  med  $\Phi(a, 1/a) = 1$ . Detta villkor ger nu samma ekvation som tidigare för  $a$ .

**Svar.** Punkten är  $P = (\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ .

## DEL C

7. Betrakta ekvationen  $F(x, y) = 0$  där  $F(x, y) = xe^y + ye^x$ .

- (a) Visa att det finns en funktion  $g$  med  $g(0) = 0$  sådan att  $F(x, g(x)) = 0$  för  $x$  nära 0. (1 p)
- (b) Beräkna Taylorpolynomet av grad två för  $g$  vid  $x = 0$ . (3 p)

**Lösningförslag.**

- (a) Vi kan använda implicita funktionssatsen för att visa detta. Villkoren för denna är uppfyllda eftersom de ingående funktionerna är kontinuerligt deriverbara. Vi behöver kontrollera att derivatan av  $F$  med avseende på  $y$  är nollskild för att vi ska kunna lösa ut  $y$  som en funktion av  $x$ .

$$\frac{\partial F}{\partial y} = xe^y + e^x$$

och därmed är

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 0 \cdot e^0 + e^0 = 0 + 1 = 1 \neq 0.$$

Implicita funktionssatsen ger nu att vi kan lösa ut  $y$  som en funktion  $y = g(x)$  i närheten av origo.

- (b) För att beräkna Taylorpolynomet av grad två kan vi derivera identiteten  $F(x, g(x)) = 0$  med avseende på  $x$ . Vi får

$$0 = \frac{d}{dx} (xe^{g(x)} + g(x)e^x) = e^{g(x)} + xe^{g(x)}g'(x) + g'(x)e^x + g(x)e^x$$

och när vi sätter in  $x = 0$  får vi

$$0 = 1 + g'(0) + 0$$

vilket ger  $g'(0) = -1$ . För att få andraderivatan deriverar vi en gång till och får

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx} (e^{g(x)} + xe^{g(x)}g'(x) + g'(x)e^x + g(x)e^x) \\ &= e^{g(x)}g'(x) + e^{g(x)}g'(x) + xe^{g(x)}(g'(x))^2 + xe^{g(x)}g''(x) \\ &\quad + g''(x)e^x + g'(x)e^x + g'(x)e^x + g(x)e^x. \end{aligned}$$

När vi sätter in  $x = 0$  får vi

$$0 = g'(0) + g'(0) + 0 + 0 + g''(0) + g'(0) + g'(0) + 0$$

vilket ger  $g''(0) = -4g'(0) = 4$ . Taylorpolynomet av grad två blir därmed

$$p(x) = 0 - x + 4x^2/2 = -x + 2x^2.$$

**Svar.**

- (b) Taylorpolynomet av grad två vid  $x = 0$  är  $p(x) = -x + 2x^2$ .



8. Funktionen  $f$  ges av

$$f(t) = \iint_D \exp\left(\frac{tx}{y^2}\right) dx dy$$

där  $t > 0$  och området  $D$  definieras av att  $t \leq x \leq 2t$  och  $t \leq y \leq 2t$ . Visa att

$$f(t) = Ct^2$$

för någon konstant  $C$ .

(4 p)

**Lösningförslag.** Vi genomför variabelbytet  $u = x/t$ ,  $v = y/t$  och får Jacobimatrisen

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{bmatrix} 1/t & 0 \\ 0 & 1/t \end{bmatrix}$$

och därmed  $dudv = 1/t^2 dx dy$ . Alltså har vi

$$f(t) = \int_1^2 \int_1^2 \exp\left(\frac{t^2 u}{t^2 v^2}\right) t^2 dudv = t^2 \int_1^2 \int_1^2 \exp\left(\frac{u}{v^2}\right) dudv.$$

Vi har därmed visat att  $f(t) = Ct^2$  där konstanten  $C$  ges av

$$C = \int_1^2 \int_1^2 \exp\left(\frac{u}{v^2}\right) dudv.$$

9. Låt  $g(r)$  vara en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion med  $g'(4) = 1$ . Beräkna integralen

$$\iint_D (f''_{xx} + f''_{yy}) \, dx dy,$$

där  $f(x, y) = g(x^2 + y^2)$  och  $D$  är en cirkelskiva med radie 2 kring origo. **(4 p)**

**Lösningförslag.** Eftersom förutsättningarna för divergenssatsen i planet är uppfyllda kan vi skriva om dubbelintegralen som en flödesintegral

$$\iint_D (f''_{xx} + f''_{yy}) \, dx dy = \int_C \mathbf{grad} f \cdot d\mathbf{N}.$$

Vi får gradienten av  $f$  som

$$\mathbf{grad} f = (2xg'(x^2 + y^2), 2yg'(x^2 + y^2)).$$

En normerad normalvektor till cirkeln  $C$  ges av  $\mathbf{N}(x, y) = \frac{1}{2}(x, y)$  och därmed blir linjeintegralen

$$\int_C \mathbf{grad} f \cdot d\mathbf{N} = \int_C g'(4)(2x, 2y) \cdot (1/2x, 1/2y) \, ds = \int_C (x^2 + y^2) \, ds = 4 \int_C ds = 4 \cdot 4\pi = 16\pi.$$

Ett annat sätt att lösa uppgiften är att beräkna integranden  $f''_{xx} + f''_{yy}$  som

$$f''_{xx} + f''_{yy} = 4g'(x^2 + y^2) + 4(x^2 + y^2)g''(x^2 + y^2).$$

Övergång till polära koordinater ger

$$\iint_D (f''_{xx} + f''_{yy}) \, dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 4g'(r^2) + 4r^2g''(r^2) r \, dr d\theta = 2\pi \int_0^2 4g'(r^2) + 4r^2g''(r^2) r \, dr.$$

Variabelbytet  $t = r^2$  ger sedan  $dt = 2r \, dr$  och

$$2\pi \int_0^2 4g'(r^2) + 4r^2g''(r^2) r \, dr = 4\pi \int_0^4 g'(t) + tg''(t) \, dt = 4\pi [tg'(t)]_0^4 = 4\pi \cdot 4 - 4\pi \cdot 0 = 16\pi.$$

**Svar.**  $\iint_D (f''_{xx} + f''_{yy}) \, dx dy = 16\pi.$

---