KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
Onsdag, 13 januari 2016

Skrivtid: 08:00–13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Tilman Bauer

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Låt $A = (1, -1, 1)$, $B = (1, 3, 1)$, $C = (1, 1, 0)$ vara punkter i $\mathbb{R}^3$.
   (a) Beskriv på parameterform planet P som innehåller A, B och C och ange ett system av linjära ekvationer som beskriver P. **(2 p)**
   (b) Låt L vara linjen genom A och B. Beräkna avståndet mellan C och linjen L. **(2 p)**

2. Betrakta följande matris:
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$
   (a) Avgör om vektorn $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ligger i bilden $\operatorname{im}(A)$. **(2 p)**
   (b) Bestäm en bas till nollrummet $\ker(A)$. **(2 p)**

3. Låt
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
   (a) Bestäm egenvärdena och motsvarande egenvektorerna till matrisen A. **(1 p)**
   (b) Bestäm en 2×2-matris S så att $S^{-1}AS$ är en diagonalmatris. **(1 p)**
   (c) Beräkna A^{139}. **(2 p)**

DEL B

4. För att bestämma längdutvidgningskoefficienten λ för en metall gjordes ett experiment där en metallstång upphettades och längden avlästes. Använd minsta kvadratmetoden för att ur dessa data bestämma λ.

Temp (C°)	20	22	24	26
Längd (mm)	1	2	4	5

Följande linjära samband mellan temperaturen T och längden L gäller:

$$L(T) = L_0 + L_1(T - T_m),$$

där $T_m = 23$ är medelvärdet av de fyra temperaturvärdena. Längdutvidgningskoefficienten λ fås ur sambandet $L_1 = \lambda L_0$.

5. (a) Motivera varför det finns precis en linjär avbildning $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sådan att

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

(2 p)

(b) Bestäm matrisen till f i standardbaserna. **(2 p)**

6. Vektorrummet W spänns upp av basen $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$, där

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Låt $\mathcal{C}$ vara en annan bas till W sådant att matrisen $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ är övergångsmatrisen från basen $\mathcal{B}$ till basen $\mathcal{C}$. Bestäm basen $\mathcal{C}$. **(2 p)**

(b) Avgör om vektorn $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ligger i W och i så fall bestäm vektorns koordinater i baserna $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$. **(2 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. För en $n \times n$ matris
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
kallas summan av de diagonala elementerna $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ för **spåret** av A och betecknas med $\mathrm{tr}(A)$.
   (a) Låt A och B vara $n \times n$-matriser. Bevisa att $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Konkludera att $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B^{-1}AB)$ under förutsättningen att B är inverterbar. **(2 p)**
   (b) Låt $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning. Låt M vara matrisen till f med avseende på en bas $\mathcal{B}$. Spåret av avbildningen f definieras som spåret till matrisen M. Visa att detta är väldefinierad, dvs. att spåret är oberoende av basvalet. **(2 p)**

8. Låt A vara en symmetrisk och inverterbar matris.
   (a) Bevisa att inversen A^{-1} också är en symmetrisk matris. **(2 p)**
   (b) Bevisa att $(\vec{x})^T A\vec{x}$ är en positivt definit kvadratisk form om och endast om $(\vec{x})^T A^{-1}\vec{x}$ är en positivt definit kvadratisk form. **(2 p)**

9. Låt $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, och $\vec{v}_3$ vara ortonormala vektorer i $\mathbb{R}^3$. Beräkna beloppet av determinanten:
$$\left|\det\begin{bmatrix}\vec{v}_1 + \vec{v}_2 & \vec{v}_2 + \vec{v}_3 & \vec{v}_3 + \vec{v}_1\end{bmatrix}\right|$$
(4 p)