REGLERTEKNIK

KTH

REGLERTEKNIK AK EL1000/EL1120

Kortfattade lösningsförslag till tentamen 2016–01–15

1. (a) i. Skriv $G(s)$ som $G(s) = \dfrac{1}{(s+2)(s+3)}$. Nu kan transformpar A.34 i Appendix A.2 i Glad & Ljung användas direkt, vilket ger stegsvaret

$$y(t) = \frac{1}{6}\left(1 - 3e^{-2t} + 2e^{-3t}\right).$$

ii. En partialbråksuppdelning av $G(s)$ ger

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s+2}U(s) - \frac{1}{s+3}U(s).$$

Vi väljer tillstånden x_1 och x_2 som

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{1}{s+2}U(s) \Rightarrow \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + u(t) \\ X_2(s) &= \frac{1}{s+3}U(s) \Rightarrow \dot{x}_2(t) = -3x_2(t) + u(t). \end{aligned}$$

En diagonalform är nu

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} x(t). \end{aligned}$$

(b) Vi använder formeln $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$, där

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s+2 & -1 \\ 0 & s+3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{(s+2)(s+3)} \\ 0 & \dfrac{1}{s+3} \end{pmatrix}.$$

Detta ger $G(s) = \dfrac{s}{s^2 + 5s + 6}$.

(c) Från blockschemat får vi följande ekvationer:

$$\begin{aligned}
X_1(s) &= \frac{1}{s+1}U(s) \Rightarrow \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t) \\
X_2(s) &= \frac{1}{s+3}[U(s) + X_1(s)] \Rightarrow \dot{x}_2(t) = x_1(t) - 3x_2(t) + u(t) \\
Y(s) &= X_1(s) + X_2(s) \Rightarrow y(t) = x_1(t) + x_2(t).
\end{aligned}$$

Detta kan direkt skrivas på tillståndsformen

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\
y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x(t).
\end{aligned}$$

2. (a) Direkt avläsning i figuren ger $\omega_c = 0.5$ rad/s och $\varphi_m = 30°$. För låga frekvenser är fasen ungefär $-90°$ och amplituden avtar med ungefär en faktor 10 då frekvensen ökar en faktor 10. Alltså borde systemet ha *en* pol i $s = 0$ (en integrator).

   (b) i. Vi vill ha $1 = |F_1(i2)G(i2)| = K|G(i2)|$ och $|G(i2)| \approx 0.07$. Alltså är $K = 14$. Avläsning av $\arg G(i2)$ ger att $\varphi_m = 8°$.

   ii. Man ser i figuren att $\arg G(i0.2) = -125°$ vilket ger önskad fasmarginal $\varphi_m = 55°$ om vi väljer K så att $K|G(i0.2)| = 1$. Detta ger $K = 0.25$ då $|G(i0.2)| \approx 4$.

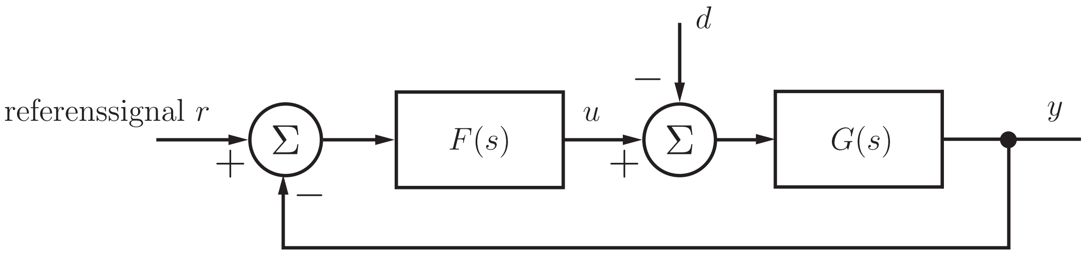
   iii. $F_3(s)$ är en fasavancerande länk och vi väljer dess parametrar därefter. Vi ser i figuren att $|G(i2)| \approx 0.07$ och $\arg G(i0.2) \approx -172°$. För att få fasmarginal $\varphi_m = 55°$ måste vi höja fasen med $55° - 8° = 47°$. Detta ger $\beta = 0.15$. Parametern τ_D väljs med formeln $\tau_D = \dfrac{1}{\omega_{c,d}\sqrt{\beta}} = \dfrac{1}{2\sqrt{0.15}} \approx 1.3$. Slutligen väljs K så att önskad skärfrekvens på 2 rad/s uppnås: $K = \dfrac{\sqrt{\beta}}{|G(i2)|} \approx 5.5$.

3. (a) I jämvikt gäller $0 = F_{e0} - v_0^2$ då $\alpha = 0$. Alltså är jämviktskraften $F_{e0} = 1$ då $v_0 = 1$.

   Dynamiken kan skrivas $\dot{v} = f(v, F_e) = -v^2 + F_e$ då $\alpha = 0$. Linjäriserar vi f kring punkten $(v_0, F_{e0}) = (1, 1)$ fås $f(v, F_e) \approx f(v_0, F_{e0}) + \frac{\partial f}{\partial v}\big|_{v_0,F_{e0}} \Delta v + \frac{\partial f}{\partial F_e}\Big|_{v_0,F_{e0}} \Delta F_e = 0 - 2\Delta v + \Delta F_e$ eftersom $\frac{\partial f}{\partial v} = -2v$ och $\frac{\partial f}{\partial F_e} = 1$. Den linjäriserade modellen är alltså

$$\frac{d}{dt}\Delta v = -2\Delta v + \Delta F_e, \quad \text{där } \Delta v = v - v_0,\ \Delta F_e = F_e - F_{e0}.$$

   Överföringsfunktion från ΔF_e till Δv blir då $G(s) = \dfrac{1}{s+2}$.



Figur 1: Blockschema för systemet i problem 3-(b).

(b) Blockschema ges i figur 1.

(c) För att eliminera reglerfel under konstanta störningar behövs normalt integralverkan i regulatorn, så vi ansätter en PI-regulator $F(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$.
Slutna systemets överföringsfunktion ges av

$$G_c(s) = \frac{G(s)F(s)}{1 + G(s)F(s)} = \frac{K_P s + K_I}{s^2 + (2 + K_P)s + K_I},$$

då $G(s) = \dfrac{1}{s+2}$ från delproblem (a). Slutna systemets poler ska ligga i $s = -4$ så karakteristiska ekvationen ska anta formen

$$s^2 + (2 + K_P)s + K_I = (s + 4)^2 = s^2 + 8s + 16.$$

Genom att matcha koefficienter fås $K_P = 6$ och $K_I = 16$. Detta uppfyller krav (i).
För att verifiera att reglerfelet $e = r - y$ verkligen blir noll under konstanta referenser $r(t) = r_0$ och störningar $d(t) = d_0$ (krav (ii)) räknar vi ut överföringsfunktionerna från r och d till e. Från blockschemat i figur 1 fås

$$\begin{aligned} E(s) = R(s) - Y(s) &= \frac{1}{1 + G(s)F(s)} R(s) + \frac{G(s)}{1 + G(s)F(s)} D(s) \\ &= \frac{s(s+2)}{(s+4)^2} R(s) + \frac{s}{(s+4)^2} D(s). \end{aligned}$$

Eftersom slutna systemet är stabilt och insignalerna är konstanta, $d(t) = d_0$ och $r(t) = r_0$, kan vi använda slutvärdesteoremet:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \left(s\frac{s(s+2)}{(s+4)^2}\frac{r_0}{s} + s\frac{s}{(s+4)^2}\frac{d_0}{s} \right) = 0,$$

oavsett val av r_0 och d_0, vilket skulle visas.

4. (a) Med givna val av $\beta = 1$ och $\gamma = 2$ fås

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha - 2 & \alpha & 2 \\ \alpha & -\alpha - 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Styrbarhetsmatrisen ges av

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha - 2 & 2\alpha^2 + 4\alpha + 8 \\ 0 & \alpha & -2\alpha^2 - 3\alpha + 2 \\ 0 & 2 & -\alpha - 10 \end{pmatrix}.$$

För att systemet ska vara styrbart måste det gälla att $\det(\mathcal{S}) \neq 0$. Vi söker därför först de α för vilka $\det(\mathcal{S}) = 0$. Vi har

$$\det(\mathcal{S}) = \begin{vmatrix} 1 & -\alpha - 2 & 2\alpha^2 + 4\alpha + 8 \\ 0 & \alpha & -2\alpha^2 - 3\alpha + 2 \\ 0 & 2 & -\alpha - 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & -2\alpha^2 - 3\alpha + 2 \\ 2 & -\alpha - 10 \end{vmatrix}$$
$$= 3\alpha^2 - 4\alpha - 4 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3} \pm \frac{4}{3}.$$

I uppgiften angavs att $\alpha \geq 0$. Alltså är systemet styrbart för alla $\alpha \geq 0$ förutom $\alpha = 2$.

(b) Med givna val av $\alpha = 0$, $\beta = 1$ och $\gamma = 2$ fås

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi ansätter en tillståndsåterkoppling $u = -Lx = -\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix} x$ med tre fria parametrar. Slutna systemets poler ges av ekvationen

$$0 = \det(sI - A + BL) = \begin{vmatrix} s + 2 + l_1 & l_2 & -2 + l_3 \\ 0 & s + 1 & -1 \\ -2 & -1 & s + 3 \end{vmatrix}$$
$$= s^3 + (6 + l_1)s^2 + (6 + 4l_1 + 2l_3)s + 2(l_1 + l_2 + l_3).$$

Enligt uppgiften ska karakteristiska ekvationen anta formen

$$0 = (s + 1)(s + 2)(s + 3) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6.$$

Genom att matcha koefficienter fås ekvationssystemet

$$\begin{cases} 6 = 6 + l_1 \\ 11 = 6 + 4l_1 + 2l_3 \\ 6 = 2(l_1 + l_2 + l_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l_1 = 0 \\ l_2 = 1/2 \\ l_3 = 5/2 \end{cases}.$$

5. (a) Systemets överföringsfunktion antar formen $G(s) = \frac{s+a}{s+b}$. Från nyquistdiagrammet har vi att

$$-1-2i = G(i1) = \frac{i+a}{i+b} \overset{(i+b\neq 0)}{\Longleftrightarrow} (-1-2i)(i+b) = i+a$$
$$\Leftrightarrow (2-b) - i(1+2b) = i+a.$$

Likhet av real- och imaginärdelarna ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2-b=a \\ -1-2b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases}.$$

Alltså är $G(s) = \frac{s+3}{s-1}$. (Man kan dubbelkolla i figuren att verkligen $G(i0) = -3$.)

(b) Slutna systemets överföringsfunktion ges av

$$G_c(s) = \frac{G(s)K_P}{1+G(s)K_P} = \frac{K_P(s+3)}{(K_P+1)s+3K_P-1}.$$

För att slutna systemet ska vara asymptotiskt stabilt måste polen ligga i vänstra komplexa halvplanet:

$$\frac{1-3K_P}{1+K_P} < 0.$$

Olikheten kan vara uppfylld i två olika fall

(i):

$$\begin{cases} 1-3K_P<0 \\ 1+K_P>0 \end{cases} \Leftrightarrow K_P > \frac{1}{3}.$$

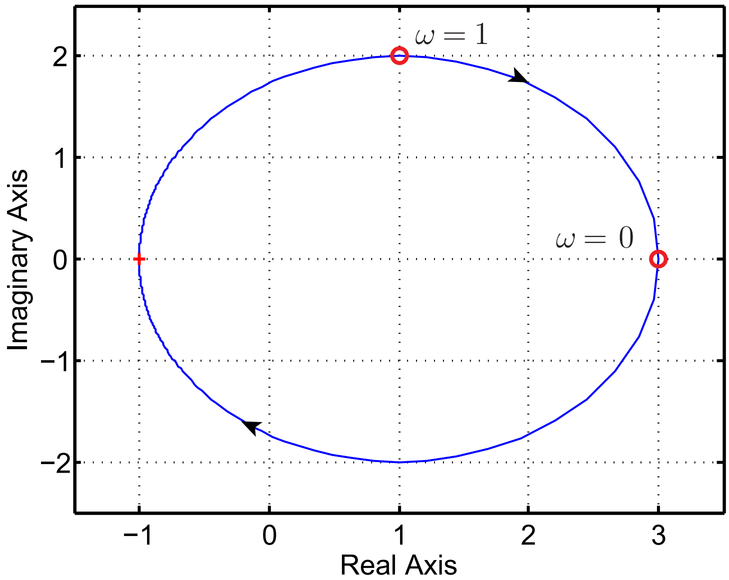
(ii):

$$\begin{cases} 1-3K_P>0 \\ 1+K_P<0 \end{cases} \Leftrightarrow K_P < -1.$$

Slutna systemet är alltså asymptotiskt stabilt för alla $K_P > 1/3$ och $K_P < -1$.

(c) Enligt nyquistkriteriet (Resultat 3.3 i Glad & Ljung) är antalet varv fullständiga nyquistkurvan (γ') omsluter punkten -1 lika med $P_s - P_o$, där P_s är antalet instabila poler hos $G_c(s)$ och P_o är antalet instabila poler hos $G(s)$. Eftersom $G(s)$ har en instabil pol har vi $P_o = 1$ och vi letar efter K_P som gör $G_c(s)$ asymptotiskt stabilt, alltså $P_c = 0$. Alltså vill vi att nyquistkurvan ska omsluta punkten -1 en gång i negativ riktning (medurs).

Figur 7 i tentan visar nyquistdiagrammet då $K_P = 1$. Det omsluter -1 en gång i negativ riktning (slutna systemet är då stabilt enligt ovan). En ändring av



Figur 2: Nyqyuistdiagram för systemet $K_P G(s)$, $K_P = -1$, i problem 5-(c).

K_P skalar bara om kurvan likformigt, och eftersom $G(i0) = -3$ inser vi att alla $K_P > 1/3$ kommer att göra $G_c(s)$ asymptotiskt stabilt.

Figur 2 ovan visar nyquistdiagrammet då $K_P = -1$, och punkten -1 skärs precis av kurvan. Kurvan genomlöps fortfarande i negativ riktning och om $K_P < -1$ kommer kurvan att omsluta punkten -1 en gång och $G_c(s)$ kommer vara asymptotiskt stabilt.

Sammanfattningsvis har vi att slutna systemet är asymptotiskt stabilt för alla $K_P > 1/3$ och $K_P < -1$, precis som i delproblem (b).