

# Lösningförslag till Reglerteknik AK Tentamen 2016–01–08

## Uppgift 1a

$$\text{Svar: } y(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 1 - e^{-2(t-1)}, & t \geq 1 \end{cases} .$$

## Uppgift 1b

Svar:

$$G_{ry}(s) = \frac{F_2(s)G(s)}{1 + F_1(s)F_2(s)G(s)}, \quad G_{lu}(s) = \frac{-F_1(s)F_2(s)G(s)}{1 + F_1(s)F_2(s)G(s)}.$$

## Uppgift 1c

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s+1} + \frac{4}{s-2} + \frac{1}{s-1} = \frac{6s^2 - 4s - 4}{(s+1)(s-2)(s-1)}$$

Svar: Polerna till  $G(s)$  är lika med egenvärdena till  $A$ , d.v.s.  $-1, 2, 1$ . Nollställena ges av

$$\frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}.$$

## Uppgift 2a

Polerna ligger i  $\{-1, -\varepsilon + i, -\varepsilon - i\}$ , med motsvarande dämpning

$$\zeta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$$

För stora  $\varepsilon$  är den reella polen klart dominant och dämpningen är nära 1. För små  $\varepsilon$  minskar dämpningen och stegsvaret blir mer oscillativ. Detta medför att stegsvar C hör till  $\varepsilon = \frac{3}{2}$ . Dämpningen (cosinus av vinkeln mot negativa reella axeln) minskar allteftersom de komplexa polerna rör sig mot den imaginära axeln, dvs. när  $\varepsilon$  minskar. Detta ger att D hör till  $\varepsilon = \frac{1}{3}$ , B till  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  och A till  $\varepsilon = \frac{2}{3}$ .

Svar:  $\varepsilon_A = \frac{2}{3}, \varepsilon_B = \frac{1}{2}, \varepsilon_C = \frac{3}{2}$  och  $\varepsilon_D = \frac{1}{3}$ .

## Uppgift 2b

Eftersom

$$G_{u,\theta}(s) = \frac{1}{s}G(s)$$

får vi

$$|G_{u,\theta}(i\omega)| = \frac{1}{\omega}|G(i\omega)|, \quad \arg G_{u,\theta}(i\omega) = \arg G(i\omega) - \frac{\pi}{2}.$$

Detta medför att Nyquistkurvan vrids  $-90^\circ$  samt avståndet till origo skalas med  $1/\omega$ .

## Uppgift 2c

Återkoppling med hjälp av både  $\theta$  och  $\dot{\theta}$  motsvarar kaskadreglering, och konstruktionen av regulatören kan förenklas om den inre kretsen är snabbare än den yttre. Man kan också reagera tidigare på störningar genom att återkoppla från  $\dot{\theta}$ . En nackdel är att man måste ha en extra sensor.

## Uppgift 3a

Använd

- $\beta = 0.1$  ger en maximal fasavancering (Figur 5.13 i kursboken) på 55 grader, d.v.s det ursprungliga systemet har 5 grader i fasmarginal eftersom fasmarginalen efter kompensering är 60 grader.
- $\tau_D = 1/(\omega_c\sqrt{\beta}) \Rightarrow \omega_c = 1/(\tau_D\sqrt{\beta}) = 1/(3.2\sqrt{0.1}) = 1 \text{ rad/s}$
- $K = \sqrt{\beta} = 0.32$ , eftersom  $|G(\omega_c)| = 1$  (samma snabbhet som för  $F = 1$ )

**Svar:**  $\omega_c = 1 \text{ rad/s}$  och  $\varphi_m = 5$  grader för det okompenserade systemet  $G(s)$ .

## Uppgift 3b

Vi vill nu fasavancera 27.5 grader vid  $\omega_c = 1$  per leadlänk, vilket ungefär motsvarar  $\bar{\beta} = 0.35$ ,  $\bar{\tau}_D = 1/(\omega_c\sqrt{\bar{\beta}}) = 1.7$  och  $K = \bar{\beta} = 0.35$  (2 länkar).

**Svar:**  $\bar{\beta} = 0.35$ ,  $\bar{\tau}_D = 1.7$  och  $\bar{K} = 0.35$ .

## Uppgift 3c

Fasen för  $F_{PI}(i\omega)$  vid  $\omega_c = 1$  är  $-\arctan(1/\tau_I) = -9.5$  grader.

**Svar:** Fasmarginalen minskas med 9.5 grader.

## Uppgift 4a

$$\det(sI - (A - BL)) = s^2 + l_2s + l_1 = (s + 2)^2 = s^2 + 4s + 4, \quad \Rightarrow L = [4 \ 4].$$

Slutet system:

$$A - BL = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Stationärt:

$$y = -C(A - BL)^{-1}Bl_0r = 0.25l_0r, \quad \Rightarrow l_0 = 4.$$

**Svar:**  $u(t) = -[4 \ 4]x(t) + 4r(t)$ .

## Uppgift 4b

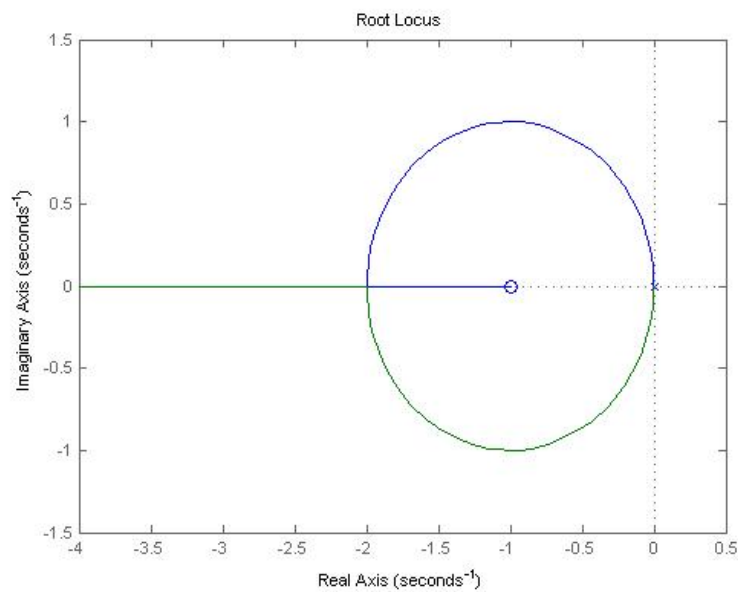
$$\det(sI - (A - KBL)) = s^2 + l_2s + l_1 = (s + 2)^2 = s^2 + K(4s + 4)$$

Rotort med

$$\begin{aligned}P(s) &= s^2 \\Q(s) &= 4(s + 1).\end{aligned}$$

- $n = 2$  startpunkter i ( $p_1 = 0$  and  $p_2 = 0$ ),  $m = 1$  ändpunkt ( $q_1 = -1$ )
- $n - m = 1$  asymptot med riktning  $\pi$ .
- Reella axeln till vänster om  $-1$
- $s = i\omega$  saknar lösning eftersom  $s^2 + K(4s + 4)$  har positiva koefficienter (stabil för alla  $K > 0$ )

Rotort:



**Svar:** Stabil för alla  $K > 0$ , oscillativt (komplexa poler) för  $0 < K < \bar{K}$ , där  $\bar{K} = 1$  (dubbelrot i  $-2$ ).  $\bar{K}$  krävs inte för att få rätt lösning.

## Uppgift 4c

Studera (med  $L$  från Uppgift 4a))

$$G_o(s) = L[sI - A]^{-1}B = \frac{4(s + 1)}{s^2}$$

(samma överföringsfunktion som för rotorten i Uppgift 4b, d.v.s. överföringsfunktionen från  $u(t)$  till  $y_c(t) = Lx(t)$ ). Stabilitet bestäms av det återkopplade systemet

$$Y_c(s) = G_o(s)U(s), \quad U(s) = -e^{-sT}Y_c(s).$$

Förenklade Nyquistkriteriet kan användas eftersom  $G_o(s)$  har två poler i 0.  $G_o(s)$  har skär-frekvens  $\omega_c = 4.12$  rad/s och fasmarginal  $\varphi_m = 76$  grader. Detta fås genom att analysera  $|G_o(i\omega)| = 1$ . Tidsförskjutningen ger en negativ färförskjutning på  $-\omega T$  radianer, vilket medför att systemet är stabilt om  $4.12T < 1.33$ , dvs  $T < 0.32$  s.

**Svar:** Systemet är stabilt om  $T < 0.32$  s.

## Exercise 5

(a) Det slutna systemet blir

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -lx(t), & x(0) &= x_0, \\ y(t) &= x(t). \end{aligned}$$

med lösning

$$y(t) = x_0 e^{-lt}, \quad u(t) = -lx(t) = -ly(t) = -lx_0 e^{-lt}.$$

Det återkopplade systemet är stabilt för  $l > 0$ . Bestäm nu

$$J(l) = \int_0^\infty [y(\tau)^2 + u(\tau)^2] e^{2\alpha\tau} d\tau,$$

genom att substituera lösningen

$$\begin{aligned} J(l) &= \int_0^\infty [x_0^2 e^{2(\alpha-l)\tau} + l^2 x_0^2 e^{2(\alpha-l)\tau}] d\tau \\ &= \int_0^\infty x_0^2 (1 + l^2) e^{2(\alpha-l)\tau} d\tau \\ &= \left| x_0^2 (1 + l^2) \frac{e^{2(\alpha-l)\tau}}{2(\alpha-l)} \right|_0^\infty = \frac{x_0^2 (1 + l^2)}{2(l - \alpha)}, \quad l > \alpha. \end{aligned}$$

Observera att  $J(l) = \infty$  om  $l \leq \alpha$ . Nu är

$$\begin{aligned} \frac{d}{dl} J(l) = 0, &\Rightarrow \frac{d}{dl} \frac{x_0^2 (1 + l^2)}{2(l - \alpha)} = 0, \Rightarrow \\ \frac{2l(l - \alpha) - (1 + l^2)}{(l - \alpha)^2} = 0, &\Rightarrow l^2 - 2\alpha l - 1 = 0. \end{aligned}$$

med lösningar

$$l_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 1}$$

där bara

$$l_1 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1},$$

uppfyller kravet  $l_1 > \alpha$ .

**Svar:** Det optimala valet av  $l$  är  $l_1 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1}$ .

(b) Motsvarande pol för det återkopplade systemet är

$$p(\alpha) = -[\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1}],$$

För små värden på  $\alpha$  är det återkopplade systemets polen nära  $-1$ . För stora värden på  $\alpha$  så är polen ungefär  $-2\alpha$ , d.v.s. proportionell mot  $\alpha$ .