



Konvergens för iterativa metoder

1 Terminologi

Iterativa metoder används för att lösa olinjära (och ibland linjära) ekvationssystem numeriskt. De utgår från en startgissning x_0 och ger sedan en följd av bättre och bättre approximationer till lösningen. Vi betecknar följden

$$x_0, x_1, x_2, \dots$$

Här kan x_j vara en skalär eller en vektor beroende på om vi löser en skalär ekvation eller ett system av ekvationer. Några exempel på iterativa metoder är fixpunktiteration, Newtons metod, intervallhalvering och Jacobis metod för linjära system. För enkelhetens skull fokuserar vi här på det skalära fallet. De flesta resultaten generaliserar till system av ekvationer.

En iterativ metod *konvergerar* om $x_n \rightarrow x$ där x är den exakta lösningen till ekvationen. Ofta konvergerar metoden bara för vissa val av startvärde x_0 . Vi säger att den iterativa metoden är *lokalt konvergent* om metoden konvergerar när startvärdet är tillräckligt nära lösningen x , dvs $x_n \rightarrow x$ om $|x - x_0|$ är tillräckligt litet. Fixpunktiterationer är tex lokalt konvergenta under förutsättning (3) nedan. Se Sauer kap 1.2.3 för bevis.

Begreppet *konvergensordning* används för att beskriva hur snabbt en följd konvergerar. Låt $e_n = x_n - x$ beteckna felet i iteration n . Vi säger att konvergensordningen är p om

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = S < \infty, \quad \text{när} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Detta betyder att för stora n kan vi uppskatta felet i nästa iteration med felet i förra iterationen som

$$|e_{n+1}| \approx S|e_n|^p.$$

Värdet S brukar kallas (den asymptotiska) konvergenshastigheten eller felkonstanten. I en iterativ metod eftersträvar vi att ha ett litet S och ett stort p eftersom det ger snabbare konvergens.

Det enklaste fallet är $p = 1$, vilket kallas *linjär konvergens*. Då minskar felet asymptotiskt med en fix faktor i varje iteration, $|e_{n+1}| \approx S|e_n| \approx S^2|e_{n-1}| \approx S^3|e_{n-2}| \dots$. Vi ser att vid linjär konvergens måste S vara mindre än 1, annars avtar inte felet, och följden kan inte konvergera.

Exempel 1: Fixpunktiteration För fixpunktiterationen $x_{n+1} = \phi(x_n)$ kan vi härleda konvergensordningen med hjälp av Taylorutveckling av ϕ runt lösningen x . Vi antar att ϕ är en (skalär) snäll funktion och att iterationerna konvergerar så att $e_n \rightarrow 0$. Vi har då att

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= x_{n+1} - x = \phi(x_n) - \phi(x) = \phi(x + e_n) - \phi(x) \\ &= e_n \phi'(x) + \frac{e_n^2}{2} \phi''(x) + \dots + \frac{e_n^{p-1}}{(p-1)!} \phi^{(p-1)}(x) + \frac{e_n^p}{p!} \phi^{(p)}(x) + \frac{e_n^{p+1}}{(p+1)!} \phi^{(p+1)}(\xi), \end{aligned} \quad (1)$$

för något ξ mellan x och x_n . Från detta uttryck drar vi slutsatsen att konvergensordningen bestäms av hur många derivator av ϕ som är noll när de evalueras i lösningspunkten x . Om tex förstaderivatan inte är noll, $\phi'(x) \neq 0$, ser vi att

$$\begin{aligned} \frac{e_{n+1}}{e_n} &= \phi'(x) + \frac{e_n}{2}\phi''(x) + \dots + \frac{e_n^{p-2}}{(p-1)!}\phi^{(p-1)}(x) + \frac{e_n^{p-1}}{p!}\phi^{(p)}(x) + \frac{e_n^p}{(p+1)!}\phi^{(p+1)}(\xi) \\ &= \phi'(x) + \mathcal{O}(e_n). \end{aligned} \quad (2)$$

Dvs,

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} \rightarrow |\phi'(x)|,$$

när $e_n \rightarrow 0$. Eftersom $\phi'(x) \neq 0$ (och är begränsad eftersom ϕ är en snäll funktion) har vi konvergensordning $p = 1$, dvs linjär konvergens. Detta är den vanligaste (generiska) konvergensordningen för fixpunktiteration. Eftersom konvergensthastigheten $S = |\phi'(x)|$ får vi följande viktiga resultat om fixpunktiteration:

För att fixpunktiterationer ska kunna konvergera mot x måste vi ha $|\phi'(x)| < 1$.

(3)

Om $\phi'(x) = 0$ blir konvergensordningen högre. Antag att de första $p - 1 > 0$ derivatorna är noll, men inte den p -te derivatan,

$$\phi'(x) = \phi''(x) = \dots = \phi^{(p-1)}(x) = 0, \quad \phi^{(p)}(x) \neq 0.$$

Då har vi konvergensordning p eftersom, enligt (1),

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = \left| \frac{\phi^{(p)}(x)}{p!} + \frac{e_n}{(p+1)!}\phi^{(p+1)}(\xi) \right| = \left| \frac{\phi^{(p)}(x)}{p!} \right| + \mathcal{O}(e_n) \rightarrow \left| \frac{\phi^{(p)}(x)}{p!} \right| \neq 0. \quad (4)$$

Exempel 2: Newtons metod Newtons metod är en fixpunktiteration för att lösa $f(x) = 0$ där $\phi(x)$ är vald enligt

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Vi beräknar dess första och andraderivata,

$$\phi'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2}, \quad \phi''(x) = \frac{f'(x)^2 f''(x) + f(x)[f'(x)f'''(x) - f''(x)]}{f'(x)^3}.$$

Eftersom $f(x) = 0$ per definitionen av x har vi att $\phi'(x) = 1 - 1 = 0$ åtminstone så länge $f'(x) \neq 0$. Andraderivatan blir $\phi''(x) = f''(x)/f'(x)$, vilket i allmänhet emellertid inte är noll. Enligt det sista resultatet i förra exemplet har därför Newtons metod konvergensordningen $p = 2$, kallad kvadratisk konvergens, när $f'(x) \neq 0$ och $f''(x) \neq 0$. När $f'(x) = 0$ blir konvergensordningen lägre (se exempel i Sauer kap 1.4.2). När $f'(x) \neq 0$ och $f''(x) = 0$ blir konvergensordningen högre.

Notera att med kvadratisk konvergensordning får vi, asymptotiskt, ungefär en dubbling av antal korrekta decimaler i varje iteration: när d decimaler är korrekta är $e_n \sim 10^{-d}$, vilket ger $e_{n+1} \approx S e_n^2 \sim 10^{-2d}$.

Exempel 3: Sekantmetoden Sekantmetoden ges av iterationsformeln (se Sauer kap 1.5.1)

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \quad (5)$$

Det är en förenklad version av Newtons metod som inte använder sig av derivatan till f , vilken kan vara kostsam att beräkna när f är komplicerad: Notera att de två senaste approximationerna, x_{n-1} och x_n används i varje iteration, inte bara x_n som för Newton. Det gör analysen av metoden lite svårare. I appendix (överkurs) visas att konvergensordningen är

$$p = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1.62.$$

Detta är något långsammare än Newton men snabbare än fixpunktiterationer.

Exempel 4: Ekvationssystem Samma analys som ovan kan göras för fixpunktiterationer och Newtons metod när $x_n \in \mathbb{R}^d$ är en vektor och $f(x), \phi(x) : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$. Kravet för konvergens av fixpunktiterationer mot roten x blir att

$$\rho(J(x)) < 1,$$

där $J(x)$ är jakobianmatrisen till $\phi(x)$ och $\rho(A)$ är spektralradien till A . Som i det skalära fallet kan vi förstå att Newtons metod har kvadratisk konvergens genom derivata

$$\phi(x) = x - J(x)^{-1}f(x),$$

med avseende på x och utnyttja att $f(x) = 0$. Det ger $D\phi(x) = 0$ som tidigare.

2 Avbrottsvillkor

I praktiska beräkningar kan naturligtvis inte n gå mot oändligheten utan man måste avbryta iterationerna vid ett ändligt värde på n . Man vill då veta hur bra den aktuella approximationen x_n är. Ofta är frågeställningen: givet en feltolerans τ , hur många iterationer n behövs för att felet ska vara mindre än toleransen, $|x_n - x| \leq \tau$.

En vanlig metod är att använda differenserna av successiva approximationer $|x_n - x_{n-1}|$ för att uppskatta hur nära lösningen x_n är. Dessa differenser kan vi lätt beräkna, och eftersom x_n konvergerar mot x bör förändringen i x_n minska när följden närmar sig x .

För fixpunktiterationer kan vi analysera situationen på följande sätt. Vi utnyttjar (2) och antar att $|\phi'(x)| < 1$,

$$\begin{aligned} e_n &= x_n - x = x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - x = x_n - x_{n+1} + e_{n+1} \\ &= x_n - x_{n+1} + \phi'(x)e_n + O(e_n^2), \end{aligned}$$

vilket efter omskrivning blir

$$|e_n| = \frac{1}{1 - \phi'(x)} |x_{n+1} - x_n| + O(e_n^2). \quad (6)$$

Vi ser att det faktiska felet i x_n är proportionellt mot differensen $|x_{n+1} - x_n|$, när x_n ligger nära lösningen (e_n är liten). För små värden på $S = |\phi'(x)|$, dvs då konvergensen är snabb, är proportionalitetskonstanten nära ett och uppskattningen $|e_n| \approx |x_{n+1} - x_n|$, är mycket bra. Speciellt gäller detta för Newtons metod, där $\phi'(x) = 0$.

Uppskattningen (6) ger felet i x_n i termer av differensen mellan den aktuella approximationen x_n och nästa värde x_{n+1} . I en praktisk implementation av algoritmen kan vi bara använda redan framräknade kvantiteter för att avgöra när iterationerna ska avslutas. Vi behöver då snarare en uppskattning av felet i termer av $x_n - x_{n-1}$. En liknande analys som ovan ger att

$$\begin{aligned} e_n &= \phi'(x)e_{n-1} + \mathcal{O}(e_{n-1}^2) = \phi'(x)(x_{n-1} - x) + \mathcal{O}(e_{n-1}^2) \\ &= \phi'(x)(x_{n-1} - x_n + x_n - x) + \mathcal{O}(e_{n-1}^2) \\ &= \phi'(x)(x_{n-1} - x_n) + \phi'(x)e_n + \mathcal{O}(e_{n-1}^2), \end{aligned}$$

vilket leder till

$$|e_n| = \frac{|\phi'(x)|}{1 - \phi'(x)} |x_n - x_{n-1}| + \mathcal{O}(e_{n-1}^2).$$

Vi har återigen att felet är proportionellt mot differensen $|x_n - x_{n-1}|$. Konstanten är nu mindre än ett när $|\phi'(x)|/(1 - \phi'(x)) \leq 1$, vilket motsvarar $\phi'(x) \leq 1/2$.

Baserat på resonemanget ovan får vi det vanliga avbrottskriteriet för fixpunktiterationer:

$$\boxed{\text{Avbryt iterationerna då: } |x_n - x_{n-1}| \leq C\tau, \quad C < 1,} \quad (7)$$

där C är en positiv säkerhetsfaktor. När (7) är uppfyllt har vi

$$|e_n| \leq \frac{|\phi'(x)|}{1 - \phi'(x)} C\tau + \mathcal{O}(e_{n-1}^2) \leq C \frac{|\phi'(x)|}{1 - \phi'(x)} \tau + \mathcal{O}(e_{n-1}^2) \leq \tau,$$

om säkerhetsfaktorn valts tillräckligt liten så att den kompenserar för de högre ordningens termerna $\mathcal{O}(e_{n-1}^2)$ och för eventuellt långsam konvergens, $\phi'(x) > 1/2$.

Notera att avbrottskriteriet (7) med $C = 1$ ofta används också för Newtons metod, trots att det normalt då överskattar felet ganska mycket, eftersom $\phi'(x) = 0$ i det fallet.

3 Empirisk skattning av konvergensordningen

Vi vill ibland kunna bestämma konvergensordningen hos en metod direkt ifrån en följd av approximationer x_0, x_1, \dots, x_n som metoden genererat. Anledningen kan vara att verifiera att metoden är korrekt implementerad eller att få en bättre uppfattning om hur pålitliga de beräknade värdena är; om konvergensordningen p och konvergenshastigheten S är känd kan man göra bättre feluppskattningar än de som gjordes i förra sektionen. Vi antar att vi får givet x_n för $n = 0, \dots, N$ och att $x_N \approx x$, dvs felet e_N är litet.

3.1 Linjär eller superlinjär konvergens

Den första och vanligen viktigaste frågan är att avgöra om konvergensen är linjär $p = 1$ eller *superlinjär*, dvs $p > 1$. För linjär konvergens är det också ofta av intresse att bestämma konvergenshastigheten S . Denna ger en mer finkorning gradering av konvergenshastigheten: S liten betyder snabb linjär konvergens och S stor betyder långsam linjär konvergens. (Superlinjär konvergens är så pass snabb i sig att värdet på S inte är lika intressant.)

Enligt definitionen av linjär konvergens är $|e_{n+1}/e_n| \approx S$ när iteraten x_n ligger nära lösningen. Om den exakta lösningen x är känd kan vi lätt undersöka detta genom att helt enkelt räkna ut $e_n = x_n - x$ och motsvarande kvoter för ett par n i slutet av följderna $n = N, N - 1, N - 2, \dots$. Om de beräknade kvoterna är ungefär konstanta (och nollskilda) när n varierar, har vi linjär konvergens och S ges av konstanten. Om, å andra sidan, kvoterna avtar mot noll är konvergens superlinjär, eftersom

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} |e_n|^{p-1} \approx S |e_n|^{p-1} \rightarrow 0,$$

n	x_n	$ e_n = x_n - x $	$\frac{ e_n }{ e_{n-1} }$	$\frac{ x_n - x_{n-1} }{ x_{n-1} - x_{n-2} }$
0	1.0000000000000000	0.260914866784839		
1	0.540302305868140	0.198782827347021	0.761868535114732	
2	0.857553215846393	0.118468082631233	0.595967389197154	0.690129435122320
3	0.654289790497779	0.084795342717382	0.715765300104774	0.640702418670910
4	0.793480358742566	0.054395225527405	0.641488362264204	0.684779212030215
5	0.701368773622757	0.037716359592404	0.693376288575221	0.661765996657315
6	0.763959682900654	0.024874549685494	0.659516187519410	0.679511802956012
7	0.722102425026708	0.016982708188453	0.682734296828578	0.668743406300493
8	0.750417761763761	0.011332628548600	0.667303967237996	0.676473762861502
9	0.731404042422510	0.007681090792651	0.677785454602224	0.671498966013349
10	0.744237354900557	0.005152221685396	0.670766929395737	0.674950137199354

Tabell 1. Resultatet från de första tio fixpunktiterationerna i Exempel 5. De två sista kolumnerna tenderar båda mot en nollskild konstant, vilket indikerar att konvergensen är linjär.

n	x_n	$ e_n = x_n - x $	$\frac{ e_n }{ e_{n-1} }$	$\frac{ x_n - x_{n-1} }{ x_{n-1} - x_{n-2} }$
0	1.0000000000000000	2.609148667848394e-01		
1	0.7503638678402439	1.127873462508325e-02	4.322764265626972e-02	
2	0.7391128909113617	2.775769620102870e-05	2.461064749169397e-03	4.506950508943992e-02
3	0.7390851333852839	1.701233281048130e-10	6.128870597643771e-06	2.467121411158941e-03
4	0.7390851332151607	6.390538011152968e-21	3.756414879925083e-11	6.128908160698567e-06
5	0.7390851332151607	9.017466277793440e-42	1.411065275264129e-21	3.756414880066190e-11
6	0.7390851332151607	1.795472409623835e-83	1.991105211056231e-42	1.411065275264129e-21

Tabell 2. Resultatet från de första sex iterationerna med Newtons metod i Exempel 5. De två sista kolumnerna tenderar båda mot noll, vilket indikerar att konvergensen är superlinjär.

när $p > 1$. Vanligtvis känner vi dock inte den exakta lösningen x och kan inte göra på precis detta sätt. Om vi antar att följderna kommer från en fixpunktiteration med en snäll funktion $\phi(x)$ kan vi utnyttja (6), dvs det faktum att e_n och differenserna $x_{n+1} - x_n$ med god noggrannhet är proportionella mot varandra. Vi studerar därför kvoterna mellan differenserna istället

$$\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n - x_{n-1}|} = \frac{(1 - \phi'(x))|e_n| + \mathcal{O}(e_n^2)}{(1 - \phi'(x))|e_{n-1}| + \mathcal{O}(e_{n-1}^2)} = \frac{|e_n|}{|e_{n-1}|} + \mathcal{O}(|e_n| + |e_{n-1}|) = S + \mathcal{O}(|e_n| + |e_{n-1}|).$$

Även dessa kvoter bör alltså vara ungefär konstanta i n och approximera S när $x_n \approx x$. Vi kan också förstå detta direkt genom att Taylorutveckla $\phi(x)$,

$$\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n - x_{n-1}|} = \frac{|\phi(x_n) - \phi(x_{n-1})|}{|x_n - x_{n-1}|} = |\phi'(x_n)| + \mathcal{O}(|x_n - x_{n-1}|)$$

vilket ger samma svar eftersom $S = |\phi'(x)|$ och $x_n - x_{n-1} = e_n - e_{n-1}$. Sammanfattningsvis kan vi alltså avgöra om konvergensen är linjär genom att beräkna kvoterna $|x_{n+1} - x_n|/|x_n - x_{n-1}|$ för ett par n i slutet av följderna. Om kvoterna konvergerar mot en nollskild konstant är konvergensen linjär och värdet på konstanten är lika med konvergenshastigheten S . Om kvoterna konvergerar mot noll är konvergensen superlinjär.

Exempel 5 Vi löser ekvationen $\cos(x) - x = 0$ dels med fixpunktiterationen $x_{n+1} = \cos(x_n)$, dels med Newtons metod $x_{n+1} = x_n + \frac{\cos(x_n) - x_n}{\sin(x_n) + 1}$. I båda fallen väljer vi $x_0 = 1$ som start-

gissning. I Tabell 1 och Tabell 2 visas de resulterande x_n , e_n samt kvoterna $|e_{n+1}/e_n|$ och $|x_{n+1} - x_n|/|x_n - x_{n-1}|$. I fixpunktfallet konvergerar båda kvoterna mot en nollskild konstant ≈ 0.67 vilket indikerar att konvergensen är linjär med konvergenshastighet $S \approx 0.67$. I Newton-fallet konvergerar båda kvoterna mot noll vilket indikerar superlinjär konvergens. Redan från iteraten x_n i andra kolumnen ser man att konvergensen är betydligt snabbare i Newton-fallet.

3.2 Högre ordnings konvergens

Vi härleder här en approximativ formel för p som direkt ger en skattning av konvergensordningen. Denna kan användas för att bestämma konvergensordning för högre ordnings metoder. Vi antar först att den exakta lösningen x är känd. I (4) ovan såg vi att

$$|e_{n+1}| = S|e_n|^p + \mathcal{O}(e_n^{p+1}), \quad S = \frac{|\phi^{(p)}(x)|}{p!}.$$

Efter logaritmering har vi

$$\log |e_{n+1}| = \log S + p \log |e_n| + \mathcal{O}(e_n). \quad (8)$$

När e_n är litet blir alltså $\log |e_{n+1}|$ nästan en linjär funktion $x \mapsto a + bx$ av $\log |e_n|$ med $a = \log S$ och $b = p$. Det betyder att om vi plottar $|e_{n+1}|$ mot $|e_n|$ i en `loglog`-plot i MATLAB bör vi se en rak linje med lutningen p , åtminstone för e_n -värdena i slutet av vår serie (som vi antar är små). Vi kan alltså snabbt få en uppfattning om p genom att läsa av lutningen i bilden.

Exempel 6 Vi löser ekvationen $e^{-x} - x = 0$ dels med fixpunktiterationen $x_{n+1} = e^{-x_n}$, dels med Newtons metod $x_{n+1} = x_n + \frac{e^{-x_n} - x_n}{-e^{-x_n} - 1}$. I båda fallen väljer vi $x_0 = 1$ som startgissning. Felen $|e_{n+1}|$ som funktion av $|e_n|$ visas i Figur 1. Som väntat får vi två raka linjer med lutningen ett för fixpunktiterationerna och lutningen två för Newtons metod.

Ett mer precist värde på p ges genom att bilda kvoterna

$$p_n = \frac{\log |e_{n+1}| - \log |e_n|}{\log |e_n| - \log |e_{n-1}|}.$$

Enligt (8) ovan har vi nämligen

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{\log S + p \log |e_n| + \mathcal{O}(e_n) - [\log S + p \log |e_{n-1}| + \mathcal{O}(e_{n-1})]}{\log |e_n| - \log |e_{n-1}|} \\ &= \frac{p(\log |e_n| - \log |e_{n-1}|) + \mathcal{O}(|e_{n-1}| + |e_n|)}{\log |e_n| - \log |e_{n-1}|} = p + \mathcal{O}(|e_{n-1}| + |e_n|). \end{aligned}$$

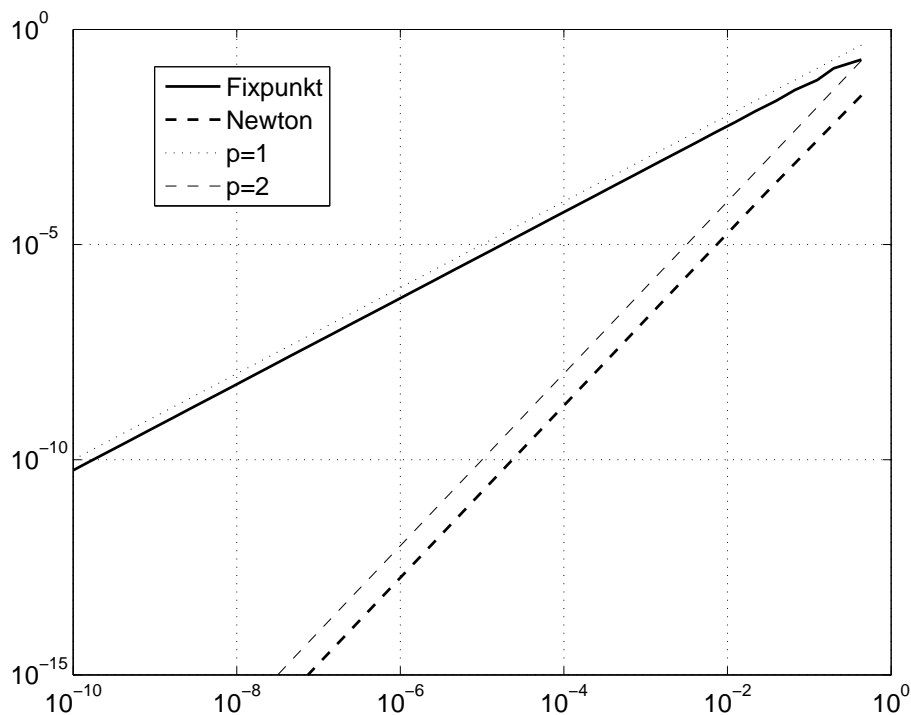
Dessa kvoter konvergerar alltså mot p när $e_n \rightarrow 0$. När väl p är bestämt kan vi lätt beräkna ett närmevärde på S från $S_n := |e_{n+1}|/|e_n|^p = S + \mathcal{O}(e_n) \rightarrow S$.

Exempel 7 Med samma metoder som i Exempel 6 ovan får vi resultaten i Tabell 3 och Tabell 4.

När den exakta lösningen x inte är känd kan vi göra samma trick som tidigare och ersätta e_n i beräkningarna med differenserna $x_{n+1} - x_n$. Slutresultat blir som ovan, att kvoterna konvergerar mot p , mer precist,

$$\frac{\log |x_{n+1} - x_n| - \log |x_n - x_{n-1}|}{\log |x_n - x_{n-1}| - \log |x_{n-1} - x_{n-2}|} = p + \mathcal{O}(|e_{n-2}| + |e_{n-1}| + |e_n|).$$

Härledningen av detta lämnas som en övning.



Figur 1. Felen $|e_{n+1}|$ som funktion av $|e_n|$, dels för fixpunktiteration ($p = 1$), dels för Newton ($p = 2$). Som jämförelse visas även två linjer med de exakta lutningarna 1 respektive 2.

n	x_n	$ e_n = x_n - x $	$\log e_n - \log e_{n-1} $	$\frac{\log e_n - \log e_{n-1} }{\log e_{n-1} - \log e_{n-2} }$
0	1	0.432856709590216		
1	0.367879441171442	0.199263849238342	-0.775776926403703	
2	0.692200627555346	0.125057337145562	-0.465857492799786	0.600504445213882
3	0.500473500563637	0.066669789846147	-0.629020404822604	1.350242111685731
4	0.606243535085597	0.039100244675813	-0.533623199809633	0.848340047029357
5	0.545395785975027	0.021747504434757	-0.586629712345336	1.099333223432963
6	0.579612335503379	0.012469045093595	-0.556249831855518	0.948212850712317
7	0.560115461361089	0.007027829048695	-0.573371334753086	1.030780239232533
8	0.571143115080177	0.003999824670393	-0.563627317953722	0.983005748266854
9	0.564879347391050	0.002263943018734	-0.569142536136869	1.009785221559470
10	0.568428725029061	0.001285434619277	-0.566011105340489	0.994497984955341

Tabell 3. Resultatet från de första tio fixpunktiterationerna i Exempel 6. Den sista kolumnen ger uppskattningen av konvergensordningen p , vilken i den här fallet är linjär, $p = 1$.

n	x_n	$ e_n = x_n - x $	$\log e_n - \log e_{n-1} $	$\frac{\log e_n - \log e_{n-1} }{\log e_{n-1} - \log e_{n-2} }$
0	1	4.328567095902161e-01		
1	0.537882842739990	2.926044766979363e-02	-2.694170053306430	
2	0.566986991405413	1.562990043706342e-04	-5.232221106759014	1.942053026807922
3	0.567143285989123	4.420660928968401e-09	-10.47323693004802	2.001680876314389
4	0.567143290409784	3.536132307588636e-18	-20.94652149191826	2.000004547956141
5	0.567143290409784	2.262617321578581e-36	-41.89304298518380	2.000000000064320

Tabell 4. Resultatet från de första fem iterationerna med Newtons metod. Den sista kolumnen ger uppskattningen av konvergensordningen p , vilken i den här fallet är kvadratisk, $p = 2$.

A Konvergensordning för sekantmetoden (överkurs)

Låt den exakta roten till f vara x , dvs $f(x) = 0$, och definiera e_n enligt ovan. Vi antar också att andraderivatans vid roten är nollskild, $f''(x) \neq 0$.

Efter subtraktion med x i (5) får vi

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= e_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = \frac{e_n[f(x_n) - f(x_{n-1})] - f(x_n)(e_n - e_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\ &= \frac{e_{n-1}f(x_n) - e_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = e_n e_{n-1} \frac{\frac{f(x_n)}{e_n} - \frac{f(x_{n-1})}{e_{n-1}}}{\frac{f(x_n)}{e_n} - \frac{f(x_{n-1})}{e_{n-1}}} =: e_n e_{n-1} g_n. \end{aligned}$$

Vi antar fortsättningsvis att $g_n \neq 0$ för alla n . (Om $g_n = 0$ har vi ju redan hittat den exakta roten eftersom $e_{n+1} = 0$.) Låt $s(t) := f(t)/(t - x)$ och $\Delta x_n = x_n - x_{n-1} = e_n - e_{n-1}$. Det ger att

$$g_n = \frac{s(x_{n-1} + \Delta x_n) - s(x_{n-1})}{f(x_{n-1} + \Delta x_n) - f(x_{n-1})} = \frac{s'(x_{n-1}) + O(\Delta x_n)}{f'(x_{n-1}) + O(\Delta x_n)}.$$

Vi undersöker derivatan av s noggrannare,

$$\begin{aligned} s'(x_{n-1}) &= -\frac{f(x_{n-1}) + (x - x_{n-1})f'(x_{n-1})}{(x_{n-1} - x)^2} = -\frac{f(x) - \frac{1}{2}f''(x_{n-1})e_{n-1}^2 + O(e_{n-1}^3)}{e_{n-1}^2} \\ &= \frac{1}{2}f''(x_{n-1}) + O(e_{n-1}). \end{aligned}$$

När metoden konvergerar går e_n , och således också $|\Delta x_n|$, mot noll, dvs så snart $x_n \rightarrow x$ följer att

$$\frac{e_{n+1}}{e_n e_{n-1}} = g_n = \frac{\frac{1}{2}f''(x_{n-1}) + O(|\Delta x_n| + |e_{n-1}|)}{f'(x_{n-1}) + O(\Delta x_n)} \rightarrow \frac{f''(x)}{2f'(x)} \neq 0. \quad (9)$$

Detta är inte riktigt på den form som definitionen av konvergensordning använder, eftersom kvoten innehåller både e_n och e_{n-1} . Vi behöver därför undersöka vad konsekvensen är för andra kvoter $|e_{n+1}|/|e_n|^p$. Vi börjar med att definiera vektorerna

$$w_n := \begin{pmatrix} \log |e_n| \\ \log |e_{n-1}| \end{pmatrix}, \quad d_n = \begin{pmatrix} \log |g_n| \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Efter logaritmering ger (9) att

$$\log |e_{n+1}| = \log |e_n| + \log |e_{n-1}| + \log |g_n|.$$

Vi har därför sambandet

$$w_{n+1} = Bw_n + d_n, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrisen B är symmetrisk och enligt resultat i linjär algebra kan den då *diagonaliseras* med ortonormala matriser, dvs vi kan skriva den på formen

$$B = S\Lambda S^T, \quad S = \begin{pmatrix} | & | \\ r_1 & r_2 \\ | & | \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad S^T S = I,$$

där r_j är normerade egenvektorer till B och λ_j är motsvarande egenvärden,

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \quad r_1 = \frac{|\lambda_1|}{\sqrt{1 + \lambda_1^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\lambda_1 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \frac{|\lambda_2|}{\sqrt{1 + \lambda_2^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Vi multiplicerar med S^T och får

$$S^T w_{n+1} = S^T S \Lambda S^T w_n + S^T d_n \quad \Rightarrow \quad v_{n+1} = \Lambda v_n + S^T d_n, \quad v_n := S^T w_n.$$

Eftersom Λ är diagonal kopplar elementen i $v_n = (v_{1,n} \ v_{2,n})^T$ isär. Vi betraktar första komponenten.

$$v_{1,n+1} = \lambda_1 v_{1,n} + r_{1,1} \log |g_n|.$$

Denna rekursion har lösningen

$$v_{1,n+1} = v_{1,0} \lambda_1^{n+1} + r_{1,1} \sum_{j=0}^n \lambda_1^{n-j} \log |g_j|.$$

Eftersom $|\lambda_1| < 1$ går första termen mot noll när $n \rightarrow \infty$. Vidare, är följderna $\{\log |g_n|\}$ begränsad eftersom $g_n \neq 0$ och $\{|g_n|\}$ konvergerar mot ett nollskilt tal. Det betyder att det finns ett tal D så att

$$\sum_{j=0}^n |\lambda_1^{n-j} \log |g_j|| \leq D \sum_{j=0}^n |\lambda_1^{n-j}| = D \sum_{j=0}^n |\lambda_1^j| \leq D \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_1|^j = \frac{D}{1 - |\lambda_1|} < \infty.$$

Summan är alltså absolutkonvergent och därmed konvergent mot ett tal, säg q . Vi får

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_{1,n} = r_{1,1} q.$$

Men

$$v_{1,n+1} = (S^T w_{n+1})_1 = r_1^T w_{n+1} = r_{1,1} \left(\log |e_{n+1}| + \frac{1}{\lambda_1} \log |e_n| \right).$$

Därför får vi slutligen

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^{-1/\lambda_1}} = \exp \left(\frac{v_{1,n+1}}{r_{1,1}} \right) \rightarrow \exp(q) \neq 0.$$

Följdaktligen är konvergensordningen $p = -1/\lambda_1 = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.62$.