



KTH Engineering Sciences

Laboration 1

Felanalys och Ekvationslösning

Notera numeriska resultat och producera efterfrågade plottar. På redovisningen ska ni också kunna svara på frågpunkterna (●) och förklara hur era MATLAB-program fungerar. Båda i laborationsgruppen ska kunna redogöra för teori och algoritmer! Kom väl förberedd. Ordna programfiler så att redovisningen går smidigt.

1. Ekvation med osäkra parametrar

Vi studerar en modell för kvantiteten y given av

$$y = x - a \sin(bx) - 4,$$

där a och b är parametrar som bestämts genom mätningar. De innehåller därför en viss osäkerhet. Parametrarnas värden med felgräns uppskattas till $a = 2.5 \pm 0.4$ och $b = 3.5 \pm 0.15$.

a) Visualisera osäkerheten i y för intervallet $x \in [0, 8]$ på följande sätt. Plotta först funktionen $x - a \sin(bx) - 4$ med $a = 2.5$ och $b = 3.5$. Stör sedan a och b slumpmässigt inom felgränserna, tex med MATLAB-kommandona `a = 2.5 + (2*rand-1)*0.4` och `b = 3.5 + (2*rand-1)*0.15`. Plotta funktionen med dessa a - och b -värden i samma figur (använd `hold on`). Upprepa många (>100) gånger.

Kommentar: Figuren ger en bra bild av osäkerheten i funktionsvärdena, men den är beräkningsmässigt ganska dyr att ta fram eftersom funktionen måste beräknas väldigt många gånger. Vi kommer använda figuren som referens och jämförelse när vi uppskattar osäkerheten med andra metoder nedan.

b) Vi vill beräkna y när $x = 2.8$. Bestäm felgränsen för y teoretiskt med *felfortplantningsformeln* (se tex anteckningarna (A1)).

- Hur kan man uppskatta denna felgräns ur figuren i a)? Stämmer värdet med teorin?

c) Antag nu att även x kommer från en osäker källa så att $x = 2.8 \pm 0.05$. Bestäm felgränsen för y med felfortplantningsformeln i detta fall.

- Hur kan man uppskatta denna felgräns ur figuren i a)? Stämmer värdet med teorin?

d) Vi ska nu hitta rötterna till ekvationen $y(x) = 0$. På grund av osäkerheten i a och b kommer även rötterna ha en osäkerhet. Bestäm felgränser för de tre rötterna $x \approx 2.8, 3.5, 4.4$ med *experimentell störningsräkning* (se tex anteckningarna (A1)).

OBS! I experimentell störningsräkning ska ni lösa $y(x) = 0$ *tre gånger* med olika parametervärden, per rot (inte fler!). Använd Newtons metod eller fixpunktiteration för att lösa ekvationerna.

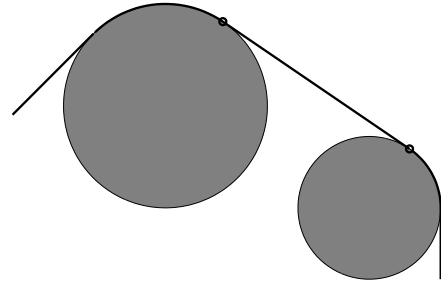
e) Bestäm felgränser för rötterna teoretiskt med felfortplantningsformeln. Eftersom rötterna är implicit definierade funktioner av parametrarna a, b behöver man använda implicit derivering.

- Vilka av rötterna påverkas mest/minst av osäkerheten i parametrarna? Hur ser man det i figuren i a)?
- Vad händer med rötterna runt $x \approx 5.8$? Vad händer runt $x \approx 1.5$?
- Jämför resultaten i d) och e). Varför blir de inte exakt samma?

2. Snöre runt cirklar

Ett snöre spänns runt två cirkelskivor enligt figuren. Cirkelarna har radierna r_a respektive r_b och är centrerade i punkterna \mathbf{a} respektive \mathbf{b} . Låt \mathbf{x}_1 och \mathbf{x}_2 vara de punkter (markerade i figuren) där snöret släpper från cirkeln. Dessa punkter kommer satisfiera ekvationssystemet

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}|^2 &= r_a^2, \\ |\mathbf{x}_2 - \mathbf{b}|^2 &= r_b^2, \\ (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \bullet (\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}) &= 0, \\ (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \bullet (\mathbf{x}_2 - \mathbf{b}) &= 0. \end{aligned}$$

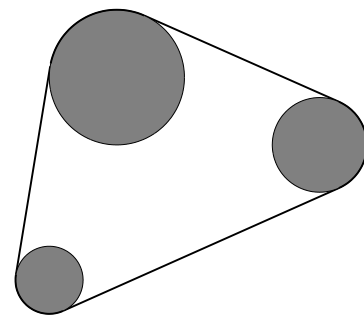


De två första ekvationerna kommer från kravet att \mathbf{x}_1 och \mathbf{x}_2 ligger på respektive cirkelrand. De två sista ekvationerna ges av att snöret är tangentiellt med cirkelranden vid punkterna, så att vektorn $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ är vinkelrät mot både $\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}$ och $\mathbf{x}_2 - \mathbf{b}$.

a) Låt $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)$ och $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2)$. Skriv om ekvationssystemet på formen $\mathbf{F}(x_1, y_1, x_2, y_2) = 0$ där \mathbf{F} är en vektorvärd funktion med fyra komponenter. Radierna r_a, r_b och cirkelarnas medelpunkter $\mathbf{a} = (x_a, y_a)$, $\mathbf{b} = (x_b, y_b)$ kommer in som parametrar i ekvationerna.

b) Beräkna Jacobian-matrisen till \mathbf{F} .

c) Skriv ett MATLAB-program som löser ekvationssystemet med Newtons metod för fallet $r_a = 1$, $r_b = 2$, $\mathbf{a} = (1, 0)$, $\mathbf{b} = (5, 2)$. (Notera att det finns mer än en lösning.) Plotta cirkelarna och snöret i en figur. Redovisa svaret (punkternas koordinater) och mellanresultat (tex skillnaden mellan successiva iterationer) som visar att implementationen har kvadratisk konvergensordning.



d) Använd ert program för att beräkna längden på ett snöre som spänts runt tre cirklar med radii $r_a = 1$, $r_b = 0.8$, $r_c = 0.6$ centrerade i $\mathbf{a} = (0, 0.5)$, $\mathbf{b} = (3, -0.5)$, $\mathbf{c} = (1.5, -3)$. Plotta cirkelarna och snöret i en figur. Ange snörets längd.