KTH Datavetenskap
och kommunikation

DT1130 Spektrala transformer
Tentamen 160113

Tentamen består av fem uppgifter där varje uppgift maximalt ger 4 p. Normalt gäller följande betygsgränser: **E: 9 p, D: 11.5 p, C: 14 p, B: 16 p, A: 18 p**
Tillåtna hjälpmedel: räknare, formelblad (bifogat)

Lycka till!

1

Signalen $x(t) = \sin(1000\pi t)$ passerar en icke-linjär funktion $f(x)$ innan den samplas med det periodiska tidsintervallet T.

Vilket är det högsta värdte på T om man inte vill tillåta vikning av några frekvenskomponenter som är starkare än $\frac{1}{100}$?

a $f(x) = x^2$

b $f(x) = x^3$

c $f(x) = x\sin(100\pi t)$

d $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{om} \quad x \geq 0 \\ -1 & \text{om} \quad x < 0 \end{cases}$

2

I figur 1 ser du impulssvar härrörande från ett antal olika filter. Varje överföringsfunktion på vänster sida motsvarar ett av impulssvaren på höger sida, och dessa ska paras ihop, med tydlig motivering.

(1p/ korrekt motiverat par)

3

Ljudingenjör T. Alrör. har fått i uppgift att spela in ett stycke solosång, och vill i sin strävan efter det perfekta ljudet kompensera för olika ”svagheter” i signalkedjan. Han tänker att ljudet från sångaren påverkas både av rummet och av mikrofonens frekvensgång, men om man känner dessa komponenter så kan man konstruera ett filter som kompenserar för detta och åstadkommer en perfekt inspelning.

(Matematiskt tänker han sig att signalen passerar två seriekopplade filter, $H_{rum}(z)$ och $H_{mik}(z)$, och det är alltså dessa filter han vill kompensera för)

Han mäter således upp rummets impulssvar $h_{rum}(n)$ där de två första samplen är $h_{rum}(0) = 1$ och $h_{rum}(1) = -.5$ (för enkelhets skull sätter vi i denna uppgift resterande sampel till noll dvs $h_{rum}(n > 2) = 0$).

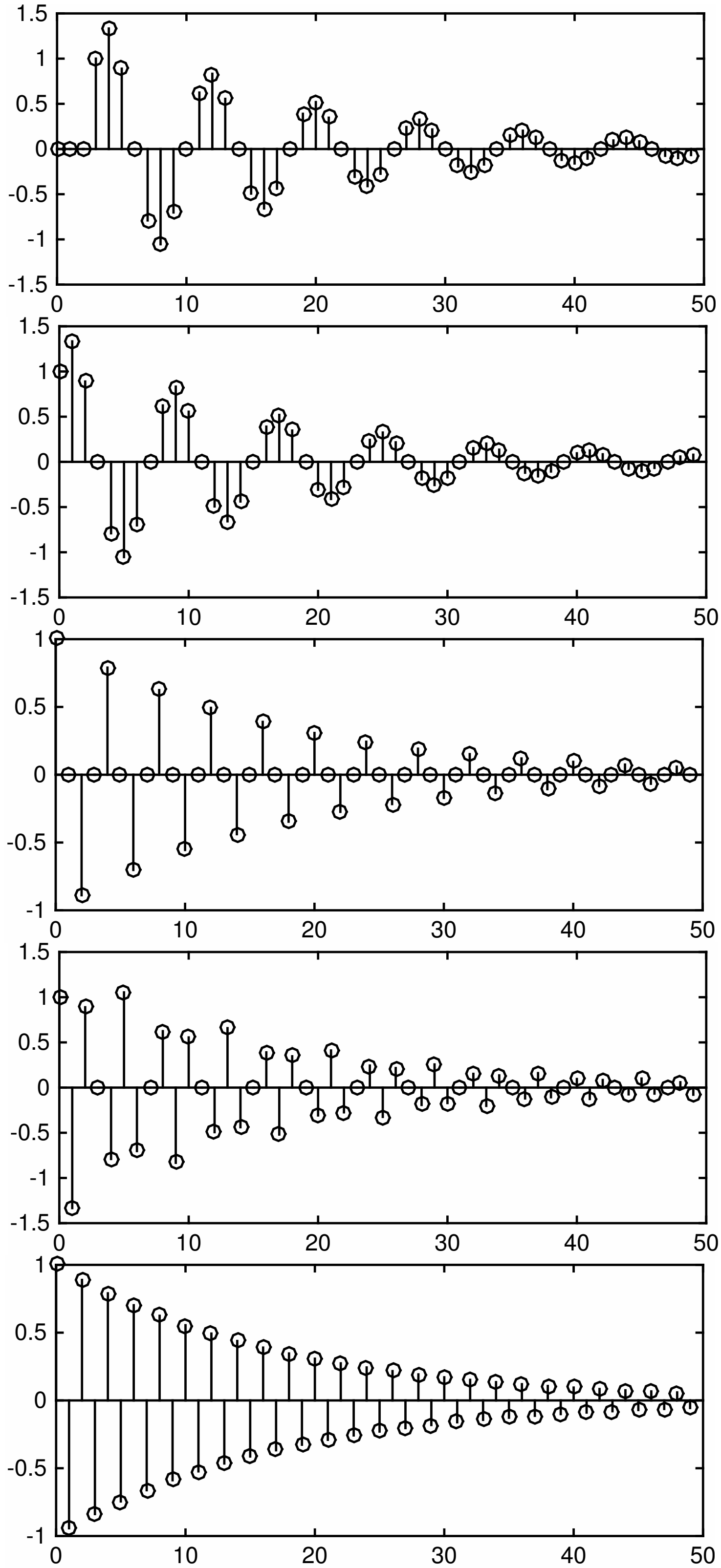
1 $H(z) = \frac{z^2}{(z-\frac{2+2j}{3})(z-\frac{2-2j}{3})}$ **a**

2 $H(z) = \frac{z^2}{(z+\frac{2+2j}{3})(z+\frac{2-2j}{3})}$ **b**

3 $H(z) = \frac{z^{-1}}{z^2-\frac{4z}{3}+\frac{8}{9}}$ **c**

4 $H(z) = \frac{1}{1+\sqrt{\frac{8}{9}}z^{-1}}$ **d**

e



Figur 1. Ok, vilka impulssvar hör ihop?

Vidare hittar han i mikrofonens datablad följande information:

$$H_{mik}(z) = \frac{1 + 0.5z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}}$$

Hjälp nu T. Alrör att designa ett filter som kompenserar för rummets impulssvar och mikrofonens frekvensgång (dvs för den sammantagna signalvägen från sångare via rum, mikrofon och sagda kompensationsfilter ska gälla att $H(z) = 1$).

Ange filtrets filterekvation i tidsdomänen (alltså $y(n) = ...$)

För *(4 p)* ska filtret anges på enklaste möjliga form.

4

Många av de koncept och metoder för signalbehandling som existerar för endimensionella signaler är även överförbara på bilder.

a Redogör för den tvådimensionella motsvarigheten av begreppen impuls och impulssvar *(1 p)*

b Hur gör man DFT på en tvådimensionell signal som en serie endimensionella DFT-operationer? *(1 p)*

c Nämn två metoder att öka prestandan i filtrering av bilder, och beskriv principen för hur de fungerar.

(2 p)

5

Filter av typen rullande medelvärde används ibland som ett enkelt sätt att jämna ut och ”snygga upp” brusiga data. Man bör dock känna till att dessa filter kan påverka signalen på sätt som man kanske inte önskar. De har nämligen alltid nollställen på enhetscirkeln, vilka har effekten att helt eliminera vissa frekvenser.

a Visa att filtret $y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)$ har nollställen i $z = j$, $z = -1$ och $z = -j$. *(2 p)*

b Betrakta nu den mer generella formen

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)$$

Hur många frekvenser kommer släckas ut av detta filter, och vilka är de? Ta fram ett uttryck för dessa.

Tips: z-domän, geometrisk serie

(2 p)

Lösningar

1

$x(t) = \sin(1000\pi t)$ ger $f = 500Hz$

Vi behöver veta hur olinjäriteterna påverkar frekvensinnehållet i signalen, och specifikt så behöver vi veta den högsta frekvens som kommer finnas (som har en amplitud över $\frac{1}{100}$). I de tre första fallen får vi detta enklast genom att skriva om $\sin(x)$ med eulers formel och tillämpa $f(x)$ på det uttrycket, och se vilka frekvenskomponenter som uppstår. Alternativt kan man använda trig-formler.

a

Kvadrering av en sinus innebär att den högsta frekvensen blir dubbelt så hög som i den ursprungliga signalen, alltså $f_{max} = 1000Hz$. Då måste $f_s > 2000Hz$ för att undvika vikning vilket ger $T < \frac{1}{2000} = 0.5ms$.

b

x^3 ger att den högsta frekvensen blir tre gånger högre dvs $f_{max} = 1500Hz$. Detta ger $f_s > 3000Hz$ samt $T < 0.333ms$.

c

Multiplikation med en annan sinus ger att högsta frekvensen blir summan av de två alltså $f_{max} = 550Hz$. Detta ger $f_s > 1100Hz$ samt $T < 0.909ms$.

d

Denna olinjäritet gör om sinusvågen till en fyrkantvåg. Vi kan således använda fourierserien för fyrkantvåg (se formelsamling). Den säger att deltonernas amplitud ges av

$$|c_k| = \frac{2}{k\pi}$$

Där k är ett udda heltal. Vi söker det värde på k när beloppet kommer under $\frac{1}{100}$. Lös ut $k = \frac{200}{\pi} = 63.6$.

$k = 63$ ger alltså den högsta deltonen som är större än $\frac{1}{100}$ vilket ger $f_{max} = 31500Hz$, $f_s > 63000Hz$ samt $T < 15.9\mu s$

2

Beräkna poler och nollställen för de fyra överföringsfunktionerna:

1

$$H_1(z) = \frac{z^2}{(z - \frac{2+2j}{3})(z - \frac{2-2j}{3})}$$

Detta filter har poler i $z = \frac{2}{3} \pm \frac{2j}{3}$, alltså polvinkeln $\pm\pi/4$. Det finns också två nollställen i origo.

2

$$H_2(z) = \frac{z^2}{(z + \frac{2+2j}{3})(z + \frac{2-2j}{3})}$$

Detta filter har poler i $z = -\frac{2}{3} \pm \frac{2j}{3}$, alltså polvinkeln $\pm\frac{3\pi}{4}$. Det finns också två nollställen i origo.

3

$$H_3(z) = \frac{z^{-1}}{z^2 - \frac{4z}{3} + \frac{8}{9}}$$

Sök nämnarens nollställen för att få polerna. PQ-regeln ger

$$z = \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{8}{9}} = \frac{2}{3} \pm \frac{2j}{3}$$

dvs samma poler och polvinkel som $H_1(z)$. Multiplikation ned z i täljare och nämnare ger

$$H_3(z) = \frac{1}{z(z - \frac{2+2j}{3})(z - \frac{2-2j}{3})}$$

Vi har alltså en pol i origo utöver ovanstående poler. Detta kan jämföra med $H_1(z)$ som har två *nollställen* i origo (se vidare under resonemang nedan).

4

Det här filtret har en pol i $z = -\sqrt{\frac{8}{9}}$ alltså polvinkel π.

Resonemang

Om vi studerar impulssvaren ser vi att det finns två med vinkelfrekvens $\pi/4$, nämligen a och b, och vi har två överföringsfunktioner med denna vinkel (H_1 och H_3). Impulssvaren är identiska bortsett från att a är tidsförskjuten 3 sampel jämfört med b. Jämför vi H_1 och H_3 ser vi att $H_3(z) = H_1(z)z^{-3}$. Alltså är H_3 fördröjd tre steg jämfört med H_1 (z^{-k} motsvarar ju en fördröjning med k sampel) och ska således paras ihop med a, och H_1 med b.

Impulssvar c har en period på 4 sampel dvs $\omega = \pi/2$. Det motsvara ingen av överföringsfunktionerna.

Impulssvar e har en period på 2 sampel dvs $\omega = \pi$ och måste höra ihop med filter 4.

d har en frekvens som är högre än c men lägre än d, vilket stämmer bra på filter 2 ($\pm\frac{3\pi}{4}$).

Rätt svar är alltså *1 - b, 2 - d, 3 - a, 4 - e.*

3

Impulssvaret för rummet ger $H_{rum} = 1 - 0.5z^{-1}$. Detta filter är seriekoplat med mikrofonfiltret, alltså ska överföringsfunktionerna multipliceras. Det ger

$$H(z) = H_{rum}(z)H_{mik}(z) = \frac{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})}{(1 - 0.5z^{-1})^2} = \frac{1 + 0.5z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}}$$

Det sökta filtret utgörs av inversen av ovanstående dvs

$$G(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1 - 0.5z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$Y(z)(1 + 0.5z^{-1}) = X(z)(1 - 0.5z^{-1})$$

övergång till tidsdomän ger

$$y(n) + 0.5y(n-1) = x(n) - 0.5x(n-1)$$

$$y(n) = x(n) - 0.5x(n-1) - 0.5y(n-1)$$

4

a

En impuls i två dimensioner motsvaras precis som i 1D-fallet av en etta omgiven av nollor. Det kan ses som en vit pixel i en övrigt svart bild.

Impulssvaret i 2D kallas ibland PSF (Point Spread Function) därför att det beskriver hur en punkt sprider sig i bilden vid filtrering. Men den vanligaste termen är filterkärna.

b

Man byter först ut varje rad i bilden mot dess endimensionella DFT, som ju blir en vektor av samma längd (dock komplex). Sedan gör man samma sak med kolumnerna i den resulterande matrisen. Färdigt!

c

Om vi har en filterkärna med dimensionen NxM, och denna filterkärna är linjärt separerbar, så kan man dela upp den i ett vertikalt filter av storleken $Nx1$ och ett horisontellt filter $1xM$, vilka appliceras efter varandra, vilket går mycket snabbare än att falta bilden med NxM-kärnan.

Man kan också göra filtreringen i frekvensdomänen. Man utnyttjar då FFT för att transformera bild och filterkärna till frekvensdomän, där (enligt faltningsteoremet) faltningen ersätts med en elementvis multiplikation. Resultatet inverstransformeras tillbaka till spatialdomän. Detta är snabbare än faltning på grund av FFT:ns speciella beräkningsegenskaper.

5

a

$y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)$

Z-transform ger

$H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} = \frac{z^3+z^2+z+1}{z^3}$

För att visa att filtret har nollställen i sagda positioner sätter vi in:

$$H(j) = \frac{-j - 1 + j + 1}{-j} = 0$$

$$H(-1) = \frac{-1 + 1 - 101}{-1} = 0$$

$$H(-j) = \frac{j - 1 - j + 1}{j} = 0$$

V.S.B.

b

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)$$

Z-transform ger

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} z^{-k}$$

Detta är en geometrisk serie (se formelblad) med $a = z^{-1}$ och $n = N-1$. Vi får då

$$H(z) = \frac{z^{-N}-1}{z^{-1}-1} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} = \frac{z^N - 1}{z^{N-1}(z-1)}$$

Vi har alltså en pol i $z = 1$, och $N-1$ poler i origo.
Nollställena ges av $z^N = 1 = e^{j2k\pi}$
där k är ett heltal.

$$z = e^{\frac{j2k\pi}{N}}$$

dvs nollställena är jämnt fördelade längs enhetscirkeln och motsvarar vinkelfrekvenserna $\omega = \frac{2k\pi}{N}$. Unika nollställen fås då k ligger mellan 0 och $N-1$. (Utanför det området återfår man samma punkter igen dvs $k = N$ ger samma sak som $k = 0$ osv.)

För $k = 0$ fås $z = 1$, och detta nollställe sammanfaller med en pol (se ovan) så dessa kommer ta ut varandra, dvs frekvensen 0 kommer *inte* att släckas ut.

De $N-1$ frekvenser som kommer släckas ges därför av

$$\omega = \frac{2k\pi}{N}$$

för $1 \leq k < N$.