Institutionen för matematik

SF1669
Matematisk och numerisk analys II
Läsåret 2015/2016

Seminarieuppgift 4

Se www.kth.se/social/course/SF1669 för information om hur seminarierna fungerar och vad du förväntas göra inför och under seminarierna.

Detta seminarium inleds med ett skriftligt prov på en variant av någon av de av de rekommenderade övningsuppgifterna ur kursboken Calculus av Adams och Essex (8:e upplagan) som är markerade med fetstil, nämligen:

Avsnitt	Rekommenderade uppgifter
13.2	**3**, **5**, 9, 15
13.3	**3**, 9, 11, 15
13.4	1, 3
14.1	15, 19, 21
14.2	**3**, **5**, 15, **23**
14.3	1, **3**, 13, 27
14.4	5, **9**, 15, **19**, 21

Vid seminariet kommer nedanstående uppgifter att diskuteras.

Uppgifter

Uppgift 1. Se på problemet att hitta största och minsta värde för funktionen som ges av $f(x, y, z) = 2x - 2y + z$ under bivillkoren $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ och $x^2 + y^2 \leq z$.

(a) Skissa området D som ges av bivillkoren.
(b) Sök stationära punkter till f i det inre av D.
(c) Sök möjliga extrempunkter på randen av D genom att parametrisera randen.
(d) Sök möjliga extrempunkter på randen av D med hjälp av Lagranges metod.
(e) Dra slutsats om största och minsta värde för f. Hur kan man vara säker på att metoden leder till rätt svar?

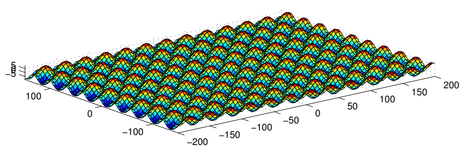
Uppgift 2. Låt H vara en regelbunden hexagon i xy-planet med alla sex hörn på enhetscirkeln varav ett ligger i punkten $(1, 0)$.

(a) Beräkna integralen $\iint_H xy\,dxdy$.

(b) Beräkna integralen $\iint_H (x^2 + y^2)\,dxdy$.

(c) Beräkna integralen $\iint_H (x - y)^2\,dxdy$.

Uppgift 3. En rektangulär plåt är veckad så att den har en form som ges av grafen för funktionen $f(x, y) = a(\cos kx + \cos ky)$ där $a = 4{,}5$ mm och $k = 0{,}2$ mm^{-1}.



Plåtens mått är 400 mm i x-led och 300 mm i y-led. När plåten ligger horisontellt kan det rymmas vatten i groparna.

(a) Hur många gropar har plåten?

(b) Använd en integral för att beräkna hur mycket vatten plåten kan rymma.

Uppgift 4. För att beräkna en integral över en triangel i planet kan man först använda ett variabelbyte som förflyttar triangeln till en triangel Δ med hörn i punkterna $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(0, 1)$. Det finns många variabelbyten som gör detta, men det lättaste är att välja ett *affint* variabelbyte, dvs ett som ges av en linjär avbildning plus en konstant. Med andra ord kan det uttryckas som

$$\begin{cases} x = a + bs + ct, \\ y = d + es + ft. \end{cases}$$

där a, b, c, d, e och f är konstanter och s och t de nya variablerna.

Betrakta nu triangeln T med hörn i punkterna $(1, 4)$, $(2, 3)$ och $(-1, -1)$.

(a) Välj ett affint variabelbyte som överför triangeln T till triangeln Δ.

(b) Bestäm Jacobianen $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}$ för variabelbytet i (a).

(c) Använd variabelbytet i (a) för att beräkna

$$\iint_T (xy - y^2)\,dxdy.$$