KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Bedömningskriterier till tentamen
Tisdagen den 12 januari 2016

Allmänt gäller följande:

- För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.
- Om lösningen helt saknar förklarande text, eller motsvarande förklaring i form av logiska symboler, till beräkningar och formler ges högst två poäng. Detta markeras vid bedömningen med FTS (Förklarande text saknas).
- Om lösningen har förklarande text men inte tillräckligt för att det ska gå att förstå alla steg ges högst tre poäng sammanlagt på uppgiften. Detta markeras med FLFT (För lite förklarande text).
- Mindre räknefel ger i allmänhet inte avdrag om de inte ändrar uppgiftens karaktär eller leder till orimligheter som borde ha upptäckts.
- Lösningen ska kunna läsas av en person som inte är insatt i problemet i förväg. Bevisbördan ligger på den som skriver, inte på den som läser.

(1) Betrakta funktionen $f(x,y) = \dfrac{1}{1+(1-x)^2+y^2}$.

(a) Beräkna gradienten till f i origo. **(1 p)**

(b) Vilken information om utseendet på grafen till f i en omgivning till origo ges av riktningen respektive längden av gradienten till f i origo? **(2 p)**

(c) Har funktionen f ett minimum över hela xy-planet? **(1 p)**

Bedömning:

(a)
- Korrekt beräkning av gradienten i origo, **1 poäng**.

(b)
- Principiellt korrekt förklaring av riktningens betydelse, **1 poäng**.
- Principiellt korrekt förklaring av längdens betydelse, **1 poäng**.

(c)
- Korrekt motivering till varför funktionen inte har något globalt minimum, **1 poäng**.

---

(2) (a) Formulera Greens formel[1] inklusive alla förutsättningar. **(2 p)**

(b) Använd Greens formel för att beräkna kurvintegralen

$$\int_T (x - 2x^2y)\,dx + (2xy^2 - y)\,dy$$

där T är randen till parallelltrapetsen med hörn i punkterna $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,4)$ och $(0,5)$ genomlöpt moturs. **(2 p)**

Bedömning:

(a)
- Korrekt formulering av Green's formel inklusive orienteringen av kurvintegralen, **1 poäng**.
- Korrekta förutsättningar när det gäller regularitet hos funktionen och områdets rand, **1 poäng**.

(b)
- Korrekt omskrivning till dubbelintegral, **1 poäng**.
- Korrekt beräkning av dubbelintegralen, **1 poäng**.

---

[1] Green's Theorem in the plane.

(3) Den plana kurva C som ges av ekvationen $27y^2 = x(x-9)^2$ kan parametriseras genom $\mathbf{r}(t) = (3t^2, 3t - t^3)$ där t genomlöper hela den reella tallinjen.

(a) Kontrollera att parameterkurvan är en del av kurvan C, det vill säga att punkterna på den uppfyller ekvationen för C. **(1 p)**

(b) Beräkna hastigheten $\mathbf{r}'(t)$ för den parametriserade kurvan. **(1 p)**

(c) Ställ upp den integral i parametern t som beräknar längden av den ögla som ges av intervallet $-\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3}$. Förenkla integranden så långt som möjligt. **(2 p)**

Bedömning:

(a) • Korrekt verifiering av att parameterkurvan är del av C, **1 poäng**.

(b) • Korrekt beräkning av hastigheten $\mathbf{r}'(t)$, **1 poäng**.

(c) • Korrekt uppställd integral för båglängden, **1 poäng**.
• Korrekt förenkling/beräkning av integralen, **1 poäng**.

---

(4) Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D xy\,dx\,dy$$

där D är området som i polära koordinater ges av olikheterna

$$\begin{cases} 0 \le r \le \sin 2\theta, \\ 0 \le \theta \le \pi/2. \end{cases}$$

(4 p)

Bedömning:

- Korrekt förändring av areaelementet, **1 poäng**.
- Korrekt uppställd integral i polära koordinater inklusive gränserna för r och θ, **1 poäng**.
- Korrekt genomförd integration med avseende på r, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av integralen, **1 poäng**.

---

(5) (a) Låt $f(x,y)$ vara en funktion av två variabler. Förklara vad som menas med att en punkt (x_0, y_0) är en stationär punkt, en lokal maxpunkt, respektive en lokal minpunkt. **(2 p)**

(b) Funktionen $f(x,y) = e^{x - x^3/3 - y^2}$ har stationära punkter i $(1,0)$ och $(-1,0)$. Avgör om dessa är lokala maxpunkter, lokala minpunkter, eller ingetdera. **(2 p)**

Bedömning:

(a) • Korrekt beskrivning av ett av de tre begreppen, **1 poäng**.
• Korrekt beskrivning av de resterande två begreppen, **1 poäng**.

(b) • Korrekt hantering av $(1,0)$, **1 poäng**.
• Korrekt hantering av $(-1,0)$, **1 poäng**.

---

(6) Kurvan C är en sammanhängande del av hyperbeln $xy = 1$ från punkten $(1, 1)$ till punkten P. Bestäm P då

$$\int_C (2x + y)\, dx + (x - 8y)\, dy = 3.$$

(4 p)

Bedömning: Vid parametrisering av kurvan

- Korrekt parametrisering av kurvan, **1 poäng**.
- Korrekt integrand i enkelintegralen med avseende på parametern, **1 poäng**.
- Korrekt beräkning av enkelintegralen, **1 poäng**.
- Korrekt motiverad slutsats om punkten P, **1 poäng**.

Vid använing av potential

- Korrekt beräkning av potentialen, **1 poäng**.
- Korrekt användning av potentialen för att beräkna kurvintegralen , **1 poäng**.
- Korrekt ekvation för a, **1 poäng**.
- Korrekt motiverad slutsats om punkten P, **1 poäng**.

---

(7) Betrakta ekvationen $F(x, y) = 0$ där $F(x, y) = xe^y + ye^x$.

(a) Visa att det finns en funktion g med $g(0) = 0$ sådan att $F(x, g(x)) = 0$ för x nära 0. **(1 p)**

(b) Beräkna Taylorpolynomet av grad två för g vid $x = 0$. **(3 p)**

Bedömning:

(a)
- Korrekt hänvisning till varför implicita funktionssatsen kan användas, **1 poäng**.
- Korrekt användning av implicita funktionssatsen, **1 poäng**.

(b)
- Korrekt beräkning av den linjära termen, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av Taylorpolynomet, **1 poäng**.

---

(8) Funktionen f ges av

$$f(t) = \iint_D \exp\left(\frac{tx}{y^2}\right)\, dxdy$$

där $t > 0$ och området D definieras av att $t \leq x \leq 2t$ och $t \leq y \leq 2t$. Visa att

$$f(t) = Ct^2$$

för någon konstant C. **(4 p)**

Bedömning:

- Korrekt val av variabelbyte, **1 poäng**.
- Korrekt Jacobian, **1 poäng**.
- Korrekt genomfört variabelbyte, **1 poäng**.
- Korret slutförd motivering av påståendet, **1 poäng**.
