



KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till kompletteringstentamen 2016-02-10

1. Bestäm med hjälp av Taylorutveckling ett närmevärde till $\cos \frac{1}{10}$. För full poäng krävs att felet är mindre än 10^{-4} och att detta bevisas i lösningen.

Lösning. Taylorutvecklingen kring origo av $\cos x$ är standard, men kan förstås också tas fram via derivering etc. Vi har att

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\cos c}{4!}x^4$$

för något c mellan 0 och x .

Speciellt gäller att

$$\cos \frac{1}{10} \approx 1 - \frac{1}{200} = 0.995$$

och att felet i denna approximation är

$$\frac{\cos c}{4!} \cdot 10^{-4} < 10^{-4}$$

□

Svar: 0.995

2. Derivera nedanstående funktioner med avseende på x och ange för vilka x de är deriverbara.

A. $f(x) = \ln \sqrt{1+x^2} - \arctan x$

B. $g(x) = \frac{1}{1 - \cos 2x}$

Lösning. A. Vi deriverar och får:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x-1}{1+x^2}.$$

Vi ser att definitionsmängden för $f'(x)$ är alla reella tal.

B. Vi deriverar och får:

$$g'(x) = -\frac{2 \sin 2x}{(1 - \cos 2x)^2}.$$

Vi ser att definitionsmängden för $g'(x)$ är alla $x \neq n\pi$, n heltal. □

Svar: Se lösningen.

3. Beräkna för varje positivt heltal n integralen

$$\int_1^e x^n \ln x \, dx.$$

Lösning. Vi använder partiell integration och får

$$\begin{aligned} \int_1^e x^n \ln x \, dx &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^n}{n+1} \, dx \\ &= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \right]_1^e \\ &= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \left(\frac{e^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \\ &= \frac{ne^{n+1}}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

□

Svar: $\frac{ne^{n+1}}{(n+1)^2}$.