KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till kompletteringstentamen 2016-02-10

1. Bestäm med hjälp av Taylorutveckling ett närmevärde till $\cos\frac{1}{10}$. För full poäng krävs att felet är mindre än 10^{-4} och att detta bevisas i lösningen.

   Lösning. Taylorutvecklingen kring origo av $\cos x$ är standard, men kan förstås också tas fram via derivering etc. Vi har att

   $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\cos c}{4!}x^4$$

   för något c mellan 0 och x.

   Speciellt gäller att

   $$\cos\frac{1}{10} \approx 1 - \frac{1}{200} = 0.995$$

   och att felet i denna approximation är

   $$\frac{\cos c}{4!} \cdot 10^{-4} < 10^{-4}$$

   $\square$

   Svar: 0.995

2. Derivera nedanstående funktioner med avseende på x och ange för vilka x de är deriverbara.

   A. $f(x) = \ln\sqrt{1+x^2} - \arctan x$

   B. $g(x) = \dfrac{1}{1-\cos 2x}$

Lösning. A. Vi deriverar och får:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x-1}{1+x^2}.$$

Vi ser att definitionsmängden för $f'(x)$ är alla reella tal.

B. Vi deriverar och får:

$$g'(x) = -\frac{2\sin 2x}{(1-\cos 2x)^2}.$$

Vi ser att definitionsmängden för $g'(x)$ är alla $x \neq n\pi$, n heltal. □

Svar: Se lösningen.

3. Beräkna för varje positivt heltal n integralen

$$\int_1^e x^n \ln x \, dx.$$

Lösning. Vi använder partiell integration och får

$$\begin{aligned}
\int_1^e x^n \ln x \, dx &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\
&= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^n}{n+1} \, dx \\
&= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_1^e \\
&= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \left(\frac{e^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
&= \frac{ne^{n+1}+1}{(n+1)^2}.
\end{aligned}$$

$\square$

Svar: $\dfrac{ne^{n+1}+1}{(n+1)^2}$.