SF1669 Matematisk och numerisk analys II

Sjuttonde föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

25 februari 2016

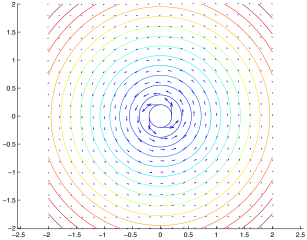
Repetition

- Arean av en yta $\mathbf{r}(s,t)$ ges av
$$\iint_D \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right| \, dsdt$$
- Ett vektorfält är en funktion $\mathbf{F}\colon D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, som ger en vektor i varje punkt.
- Fältlinjerna har tangetvektorer som är parallella med vektorfältet.
- Vektorfältet $\mathbf{F}$ är konservativt om $\mathbf{F} = \nabla f$ för någon potential f.
- Ekvipotentiallinjer (-ytor) är nivåkurvor för potentialen och de är vinkelräta mot fältlinjerna.
- Ett nödvändigt villkor för att $\mathbf{F} = (P, Q)$ ska vara konservativt är att
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$
- Villkoret är inte tillräckligt i allmänhet.

Ett exempel på icke-konservativt fält med $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

uppfyller $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ överallt utom i origo.



Om $[r, \theta]$ är polära koordinater gäller

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{och} \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

men $\theta(x, y)$ är inte väldefinierad i hela $\mathbb{R}^2$.

Kurvintegraler

Om $\mathbf{r}(t)$ är en parametrisering av en kurva γ i planet kan vi beräkna en integral av $f(x, y)$ längs kurvan genom

$$\int_\gamma f(x, y)\, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \left|\mathbf{r}'(t)\right|\, dt.$$

Exempel

Bestäm det genomsnittliga värdet för $f(x, y) = x^2 y^2$ på enhetscirkeln.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t\, dt = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t)\, dt = \frac{1}{8}.$$

Kurvintegraler av vektorfält

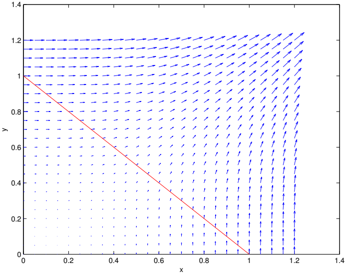
Vi kan integrera ett vektorfält $\mathbf{F}(x, y)$ längs en kurva γ genom

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(x(t), y(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

om $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ är en parametrisering av γ.

Exempel (SF1626 – Tentamen 2013-05-27, Uppgift 3(a))

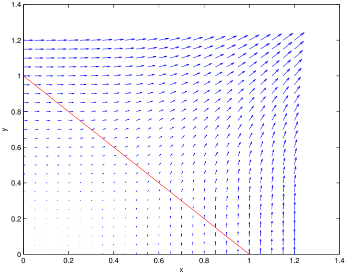
Låt $\mathbf{F}(x, y) = (y^2, x^2)$ och beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där γ är linjesegmentet från punkten $(0, 1)$ till punkten $(1, 0)$.



Kurvintegral

Exempel (SF1626 – Tentamen 2013-05-27, Uppgift 3(a))

Låt $\mathbf{F}(x, y) = (y^2, x^2)$ och beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där γ är linjesegmentet från punkten $(0, 1)$ till punkten $(1, 0)$.



Fråga

Vi kan skriva upp integralen som $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy$. Vad är P och Q?

A. $P = 2y$, $Q = 2x$

B. $P = y^2$, $Q = x^2$

C. $P = -y^2$, $Q = x^2$

D. $P = x^2$, $Q = -y^2$

En tentamensuppgift till

Exempel

För att beräkna arbetet som ett vektorfält **F** utför används kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

1. Beräkna kurvintegralen då $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$ och γ ges av $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$, där t går från -2 till 2. **(2 p)**
2. Ge ett exempel på ett vektorfält **F** sådanat att kursvintegralens värde blir 2 när kurvan γ ges av enhetcirkeln som genomlöps ett varv moturs. **(2 p)**

Fråga

Var börjar vi?

A. Parametrisera kurvan
B. Uttryck vektorfältet i parametern
C. Rita upp kurvan
D. Beräkna $d\mathbf{r}$

Kurvintegral med potential

Om **F** är konservativt är $\mathbf{F} = \mathbf{grad}\, f$ för en potential $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Då får vi

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{grad}\, f(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = [f(\mathbf{r}(t))]_a^b = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

eftersom kedjeregeln ger att

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{grad}\, f\cdot \mathbf{r}'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t).$$

Exempel

Låt $\mathbf{F}(x,y) = (xy^2, x^2y)$ och beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ där γ är linjesegmentet från punkten $(0,1)$ till punkten $(1,0)$.

Oberoende av väg

Sats

Följande påståenden är ekvivalenta för ett vektorfält **F** *i ett område D:*

1. **F** *är konservativt.*
2. *Integralen* $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ *beror bara på start och ändpunkt.*
3. *Integralen* $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ *för varje sluten kurva i D.*

Idé till bevis.

1⇒2: $\int_\gamma \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A)$.
1⇐2: Vi kan definera $f(x, y) = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där γ går från en given punkt O till (x, y). Vi behöver visa att $\nabla f = \mathbf{F}$.
2⇔3: Integralen över en sluten kurva kan ses som skillnaden mellan två integraler med samma start- och ändpunkter.

$\square$

Flöde genom kurva

Om vi istället för att beräkna vektorfältets del utefter kurvan ser på den del som är ortogonal mot kurvan får vi flödet genom kurvan som

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, ds$$

där **N** är en normerad normalvektor till γ i den aktuella punkten. Eftersom vi kan se $d\mathbf{r}$ som (dx, dy) kan vi se $\mathbf{N}\, ds$ som $(-dy, dx)$ eller $(dy, -dx)$ beroende på vilket håll vi väljer normalvektorn.

Exempel

Beräkna flödet ut genom enhetscirkeln av vektorfältet $\mathbf{F} = (x, y) = \mathbf{grad}\, \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.