Institutionen för matematik

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2014-10-30

DEL A

1. Funktionerna f och g ges av

$$f(x,y) = x^2 - y^2 \quad \text{och} \quad g(x,y) = xy$$

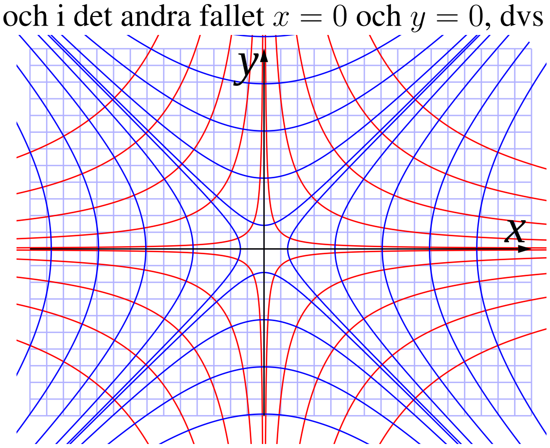
för alla reella x och y.

(a) Skissera nivåkurvorna till funktionerna f och g. **(2 p)**

(b) Visa att nivåkurvorna till f och g alltid skär varandra under rät vinkel utom i origo. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Båda funktionerna ger hyperbler som nivåkurvor. I det första fallet får vi $x^2 - y^2 = c$ och i det andra fallet får vi $xy = c$. Efter en rotation av planet med en vinkel $\pi/4$ övergår den ena av dessa i den andra och tvärtom. För $c = 0$ får vi nivåkurvor som består av två linjer genom origo som är vinkelräta mot varandra. I det första fallet är dessa linjer $y = \pm x$ och i det andra fallet $x = 0$ och $y = 0$, dvs koordinataxlarna.



(b) Att nivåkurvorna skär varandra under rät vinkel kan vi se genom att betrakta deras normalvektorer, som ges av gradienterna

$$\operatorname{grad} f = (2x, -2y) \quad \text{och} \quad \operatorname{grad} g = (y, x).$$

Dessa är vinkelräta mot varandra eftersom skalärprodukten är $(2x, -2y) \cdot (y, x) = 2xy - 2yx = 0$. (I origo kan vi inte använda gradienterna för att hitta en normalvektor eftersom gradienterna är noll. Där ges nivåkurvorna av $x^2 - y^2 = 0$, dvs $(x-y)(x+y) = 0$ respektive $xy = 0$. Detta är två par av linjer, men de är orienterade med en vinkel $\pi/4$ i förhållande till varandra.)

2. Funktionen f ges av
$$f(x,y,z) = \sin(x-y) + \sin(y-z) + \sin(z-x).$$
för (x,y,z) i $\mathbb{R}^3$.
(a) Bestäm Taylorpolynomet av första ordningen för f i närheten av punkten $(0,\pi/2,\pi/3)$. **(2 p)**
(b) Bestäm alla stationära punkter till f i området där $0 \le x,y,z < \pi$. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Taylorpolynomet av första ordningen ges av en konstantterm och den linjär term. Konstanttermen ges av funktionens värde i den aktuella punkten vilket i detta fall ger
$$\begin{aligned} f\left(0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}\right) &= \sin\left(0-\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}-0\right) \\ &= \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}. \end{aligned}$$
Den linjära termen ges av
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)$$
och vi beräknar derivitorna som
$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(0-\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}-0\right) = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(0-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) = 0 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
och
$$\frac{\partial f}{\partial z}\left(0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}-0\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$
Vi får därmed Taylorpolynomet
$$P(x,y,z) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(y-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\left(z-\frac{\pi}{3}\right).$$

(b) De stationära punkterna ges av att alla tre partiella derivator är noll, dvs till lösningen av ekvationssystemet
$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \cos(x-y) & - & \cos(z-x) & = & 0 \\ -\cos(x-y) & + & \cos(y-z) & = & 0 \\ -\cos(y-z) & + & \cos(z-x) & = & 0 \end{array}\right.$$
I det aktuella området har vi att alla skillnader $x-y, y-z, z-x$ ligger i intervallet $(-\pi,\pi)$ och det finns två möjligheter för varje ekvation, men av symmetriskäl räcker det att betrakta fallen då
$$x-y = y-z = z-x \qquad \text{och} \qquad x-y = y-z = x-z.$$

I båda fallen får vi $x = y = z = t$. De stationära punkterna ges därmed av linjen $x = y = z = t$.

Svar.

(a) Taylorpolynomet är

$$P(x, y, z) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(y - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\left(z - \frac{\pi}{3}\right).$$

(b) De stationära punkterna för f ges av linjen $(x, y, z) = t \cdot (1, 1, 1)$, där t är en reell parameter.

3. För att beräkna arbetet som ett vektorfält $\mathbf{F}$ utför används kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.
   (a) Beräkna kurvintegralen då $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$ och γ ges av $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$, där t går från -2 till 2. **(2 p)**
   (b) Ge ett exempel på ett vektorfält $\mathbf{F}$ sådant att kursvintegralens värde blir 2 när kurvan γ ges av enhetcirkeln som genomlöps ett varv moturs. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Vi får $d\mathbf{r} = (1, 2t)\, dt$ och därmed blir kurvintegralen

$$\int_\gamma \mathbf{F}(t) \cdot d\mathbf{r} = \int_{-2}^{2} (-t^2, t) \cdot (1, 2t)\, dt = \int_{-2}^{2} -t^2 + 2t^2\, dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{8 - (-8)}{3} = \frac{16}{3}.$$

(b) Vi har här $d\mathbf{r} = (-\sin t, \cos t)\, dt$ och eftersom $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi}\, dt = 2$ kan vi välja vektorfältet så att $\mathbf{F}(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) = \frac{1}{\pi}$. Ett exempel på ett sådant är

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{\pi}, \frac{x}{\pi}\right)$$

eftersom vi får

$$\mathbf{F}(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t)$$

$$= \frac{1}{\pi}(-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\pi} = \frac{1}{\pi}$$

på grund av trigonometriska ettan.

Vi kan också välja ett godtyckligt vektorfält som inte ger kurvintegralens värde noll och sedan skala om fältet så att värdet blir 2. Eftersom vi alltid får noll för ett konservativt fält får vi välja $\mathbf{F} = (P, Q)$ så att

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \neq 0$$

vilket händer tillexempel om $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$. Integralens värde blir då enligt Green's sats $\int_D 1\, dxdy = \pi$ och vi kan skala om fältet med en faktor $2/\pi$ för att få värdet 2 istället för π.

Svar.

(a) $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}(t) \cdot d\mathbf{r} = \frac{16}{3}.$

(b) $\mathbf{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{\pi}, \frac{x}{\pi}\right)$

DEL B

4. Bestäm största och minsta värde för funktionen $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ i det kompakta området som ges av olikheten $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. **(4 p)**

Lösningsförslag. Eftersom området är slutet och begränsat finns säkert ett största och ett minsta värde för den kontinuerliga funktionen $f(x, y) = xy + yz + zx$. Eftersom randen är en sluten $\mathcal{C}^1$-yta ska vi undersöka inre stationära punkter och sedan randpunkter med hjälp av Lagranges metod. (Att randytan är $\mathcal{C}^1$ kan man exempelvis se genom att gradienten $(2x, 2y, 2z)$ inte är noll någonstans på ytan.)

Gradienten för $f(x, y, z)$ ges av $\operatorname{grad} f(x, y, z) = (y+z, x+z, x+y)$ och det finns bara en stationär punkt som ges av $x = y = z = 0$. (Gausselimination ger en unik lösning.) Denna punkt ligger i det inre av området och värdet för funktionen är $f(0, 0, 0) = 0$.

Lagranges metod går ut på att se när gradienten till funktionen är parallell med gradienten till bivillkoret. Vi skriver bivillkoret som $g(x, y, z) = 0$ där $g(x, y, z) = x^2+y^2+z^2-1$ och får gradienten $\operatorname{grad} g(x, y) = (2x, 2y, 2z)$.

Vi kan se när gradienterna är parallella genom att införa multiplikatorn λ och får ekvationssystemet

$$\begin{cases} y + z = 2\lambda x \\ z + x = 2\lambda y \\ x + y = 2\lambda z \end{cases}$$

Summan av ekvationerna ger $2(x + y + z) = 2\lambda(x + y + z)$, vilket ger $\lambda = 1$ eller $x + y + z = 0$. I det första fallet får vi $x = y = z$ efter Gausselimination och i det senare får vi $-x = 2\lambda x$ och $-y = 2\lambda y$ vilket ger $\lambda = -1/2$ eller $x = y = z = 0$. Det senare stämmer inte med bivillkoret $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. När $x + y + z = 0$ har vi $g(x, y, z) = xy + yz + zx = xy - (y + x)^2 = -x^2 - xy - y^2$ medan bivillkoret säger $x^2+y^2+(x+y)^2 = 1$, dvs $2(x^2+xy+y^2) = 1$. Alltså får vi där värdet $g(x, y, z) = -1/2$. I fallet $\lambda 1$ fick vi $x = y = z$ vilket med bivillkoret ger $x = y = z = \pm 1/\sqrt{3}$. Värdet blir där $3/(\sqrt{3})^2 = 1$.

Slutligen jämför vi de tre kandidaterna till största och minsta värden för funktionen och finner att $-1/2$ är det minsta värdet och antas i skärningspunkterna mellan sfären och planet $x + y + z = 0$. Det största värdet är 1 och antas i punkterna $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ och $(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$.

Svar. Största värdet är 1 och minsta värdet är $-1/2$.

5. Beräkna integralen
$$\iint_D x^2\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$
där D är området som ges av olikheterna $x \geq 0$ och $x^2+y^2 \leq 1$. **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi kan använda polära koordinater och får då att området ges av olikheterna $0 \leq r \leq 1$ och $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Vi får en areaförändring genom variabelbytet som ges av $dxdy = r\,drd\theta$. Därmed kan vi beräkna integralen som

$$\iint_D x^2\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1 r^2\cos^2\theta\sqrt{1-r^2}\;r\,drd\theta$$
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\,dr = \left[\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_1^0 -\frac{1}{2}(1-t)\sqrt{t}\,dt$$
$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{t}-t^{3/2}\,dt = \frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}t^{3/2}-\frac{2}{5}t^{5/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right) = \frac{\pi}{15}.$$

där vi använt oss av variabelbytet $t = 1-r^2$ som ger $dt = -2r\,dr$.

Svar. $\displaystyle\iint_D x^2\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy = \frac{\pi}{15}.$

6. En kulle beskrivs av ytan
$$z = \frac{1}{1+3x^2+4y^2}$$
i ett ortonormalt koordinatsystem där z-axeln pekar verktikalt uppåt.
   (a) Bestäm kullens brantaste lutning i punkten som svarar mot $(x, y) = (a, b)$. **(2 p)**
   (b) Bestäm var kullen är som brantast. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Kullens lutning ges av gradienten till funktionen $f(x, y) = \frac{1}{1+3x^2+4y^2}$. Beloppet av gradienten ger den brantaste lutningen i en viss punkt. Vi beräknar gradienten som
$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(-\frac{6x}{(1+3x^2+4y^2)^2}, -\frac{8y}{(1+3x^2+4y^2)^2}\right).$$
och beloppet av detta blir
$$\frac{2\sqrt{9x^2+16y^2}}{(1+3x^2+y^2)^2}.$$
I punkten (a, b) blir därmed den brantaste lutningen $2\sqrt{9a^2+16b^2}/(1+3a^2+4b^2)^2$.

(b) VI behöver se var det finns stationära punkter för $|\operatorname{grad} f(x, y)|$. Detta är detsamma som att se på stationära punkter för
$$g(x,y) = |\operatorname{grad} f(x,y)|^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.$$
Vi får gradienten för $g(x, y)$ som
$$\operatorname{grad} g(x,y) = \left(2\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}, 2\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + 2\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$
Vi kan beräkna andraderivatorna som
$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\frac{6}{(1+3x^2+4y^2)^2} + \frac{6x\cdot 12x}{(1+3x^2+4y^2)^3} = -6\cdot\frac{1+3x^2+4y^2-12x^2}{(1+3x^2+4y^2)^3} = -6\cdot\frac{1-9x^2+4y^2}{(1+3x^2+4y^2)^3},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{6x\cdot 16y}{(1+3x^2+4y^2)^3} = \frac{96xy}{(1+3x^2+4y^2)^3},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -\frac{8}{(1+3x^2+4y^2)^2} + \frac{8y\cdot 16y}{(1+3x^2+4y^2)^3} = -8\cdot\frac{1+3x^2+4y^2-16y^2}{(1+3x^2+4y^2)^3} = -8\cdot\frac{1+3x^2-12y^2}{(1+3x^2+4y^2)^3}.
\end{aligned}$$
Vi får
$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x} &= 2\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 2\cdot\frac{36x(1-9x^2+4y^2)-8y\cdot 96xy}{(1+3x^2+4y^2)^3} = 24x\cdot\frac{3-27x^2-52y^2}{(1+3x^2+4y^2)^3}\\
\frac{\partial g}{\partial y} &= 2\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + 2\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\cdot\frac{64y(1+3x^2-12y^2)-6x\cdot 96xy}{(1+3x^2+4y^2)^3} = 128y\cdot\frac{1-6x^2-12y^2}{(1+3x^2+4y^2)^3}
\end{aligned}$$
Vi ska nu se på stationära punkter till g, dvs lösningar till $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0$.
Om $x = 0$ får vi att $y = 0$ eller $12y^2 = 1$, dvs $y = \pm 1/\sqrt{12}$ och om $y = 0$ får vi $x = 0$ eller $27x^2 = 3$, dvs $x = \pm 1/3$. Om både $x \neq 0$ och $y \neq 0$ får vi
$$\begin{cases} 27x^2 + 52y^2 = 3\\ 6x^2 + 12y^2 = 1\end{cases}$$

som ger $3x^2 + 4y^2 = -1$ om vi drar tre gånger den andra ekvationen från den första. Alltså finns inga reella lösningar till detta. De enda stationära punkterna till $g(x, y)$ är därmed $(0, 0)$, $(0, \pm 1/\sqrt{12})$, $(\pm 1/3, 0)$. I den första punkten är $\operatorname{grad} f(0, 0) = (0, 0)$. För de båda andra punkterna har vi

$$\operatorname{grad} f(0, \pm 1/\sqrt{12}) = \left(0, \frac{\mp 8/\sqrt{12}}{(1 + 0 + \frac{1}{3})^2}\right) = \left(0, \mp \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

och

$$\operatorname{grad} f(\pm 1/3, 0) = \left(\frac{\mp 6/3}{(1 + \frac{1}{3} + 0)^2}, 0\right) = \left(\mp \frac{9}{8}, 0\right)$$

Den största lutningen är vid $(0, \pm 1/\sqrt{12})$ eftersom

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} > \frac{9}{8} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{27}{16} > \frac{81}{64} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 > \frac{3}{4}.$$

Svar.

(a) Den brantaste lutningen vid (a, b) är $2\sqrt{9a^2 + 16b^2}/(1 + 3a^2 + 4b^2)^2$.

(b) Kullen lutar som brantast vid $(x, y) = (0, \pm 1/\sqrt{12})$ där lutningen är $3\sqrt{3}/4$.

DEL C

7. Vektorfältet $\mathbf{F}$ verkar på en partikel så att den färdas i en spiralformad bana kring origo i xy-planet med

$$\mathbf{r}(t) = (Ae^{-kt}\cos\omega t, Ae^{-kt}\sin\omega t)$$

under tiden t där $0 \leq t \leq 5$ och t mäts i sekunder, $k = 2\ \mathrm{s}^{-1}$, $\omega = 3$ radianer/s och $A = 3$ m. Enligt Newtons andra lag ges kraften på partikeln av $\mathbf{F}(t) = m\mathbf{r}''(t)$, där m är partikelns massa. Kraftfältet kan då skrivas som

$$\mathbf{F}(x, y) = m((k^2 - \omega^2)x + 2k\omega y, (k^2 - \omega^2)y - 2k\omega x)$$

för (x, y) i $\mathbb{R}^2$.

(a) Beräkna partikelns hastighet $\mathbf{r}'(t)$. **(1 p)**

(b) Avgör om kraftfältet är konservativt. **(1 p)**

(c) Beräkna arbetet som utförs av kraftfältet under partikelns rörelse. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Vi beräknar derivatan komponentvis

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) &= (-kAe^{-kt}\cos\omega t - \omega Ae^{-kt}\sin\omega t, -kAe^{-kt}\sin\omega t + \omega Ae^{-kt}\cos\omega t)\\ &= (-Ae^{-kt}(k\cos\omega t + \omega\sin\omega t), Ae^{-kt}(-k\sin\omega t + \omega\cos\omega t)).\end{aligned}$$

(b) Ett kraftfält $\mathbf{F} = (P, Q)$ kan bara vara konservativt om $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. För det givna kraftfältet har vi

$$\frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x} = -2mk\omega$$

och

$$\frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial y} = 2mk\omega.$$

Alltså är kraftfältet inte konservativt om inte $mk\omega = 0$. I vårt fall skulle det innebära att $m = 0$, eftersom $2k\omega \neq 0$.

(c) För att beräkna arbetet som fältet utför på partikeln behöver vi beräkna $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$. Vi har att $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)\,dt$ och därmed

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{0\ \mathrm{s}}^{5\ \mathrm{s}} m\mathbf{r}''(t)\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt = \frac{m}{2}\int_{0\ \mathrm{s}}^{5\ \mathrm{s}} \frac{d}{dt}\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt\\ &= \int_{0\ \mathrm{s}}^{5\ \mathrm{s}} \frac{d}{dt}\frac{m}{2}|\mathbf{r}'(t)|^2\,dt = \frac{m}{2}\left(|\mathbf{r}'(5\ \mathrm{s})|^2 - |\mathbf{r}'(0\ \mathrm{s})|^2\right).\end{aligned}$$

Vi beräknad beloppet av $\mathbf{r}'(t)$ som

$$\begin{aligned}|r'(t)|^2 &= A^2e^{-2kt}((k^2\cos^2\omega t + 2k\omega\cos\omega t\sin\omega t + \omega^2\sin^2\omega t\\ &\quad + k^2\sin^2\omega t - 2k\omega\sin\omega t\cos\omega t + \omega^2\cos^2\omega t)) = A^2(k^2+\omega^2)e^{-2kt}\end{aligned}$$

där vi har använt trigonometriska ettan, dvs att $\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1$. Därmed ges arbetet av

$$\frac{m|\mathbf{r}'(5\text{ s})|^2}{2} - \frac{m|\mathbf{r}'(0\text{ s})|^2}{2} = \frac{mA^2(k^2+\omega^2)}{2}(e^{-2kt_1} - e^{-2kt_0})$$
$$= \frac{9\cdot(4+9)m}{2}(e^{-20} - e^0)\text{ Nm/kg} = -\frac{117m}{2}(1-e^{-20})\text{ Nm/kg}.$$

Vi noterar att e^{-20} är försumbar i jämförelse med 1, vilket gör att arbetet är mycket nära $-117/2m$ Nm/kg $= 58{,}5m$ Nm/kg.

Svar.

(a) Partikelns hastighet ges av $\mathbf{r}'(t) = Ae^{-kt}(-k\cos\omega t - \omega\sin\omega t), -k\sin\omega t + \omega\cos\omega t)$.
(b) Kraftfältet är bara konservativt om $m = 0$.
(c) Arbetet är $-58{,}5m(1-e^{-20})$ Nm/kg $\approx -58{,}5m$ Nm/kg.

8. Låt $\mathbf{F}(x, y, z)$ vara ett vektorfält som är definierat i hela $\mathbb{R}^3$ och vars komponenter är kontinuerligt deriverbara till andra ordningen. Vi vill visa att flödet som ges av

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$$

där S är en godtycklig sfär i $\mathbb{R}^3$ och $\mathbf{N}$ är den utåtriktade normalvektorn till denna sfär alltid är noll.

(a) Visa detta genom att använda Stoke's sats. **(2 p)**

(b) Visa samma sak genom att använda divergenssatsen. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Med Stoke's sats kan vi beräkna flödet ut genom två halvsfärer, H_1 och H_2, genom att integrera $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ utmed cirkeln γ som skiljer halvsfärerna åt. Eftersom normalen är utåtriktad i båda fallen kommer orienteringen av de båda kurvintegralerna att vara motsatta varandra och därmed tar deras värden ut varandra när de summeras. Därmed är flödet ut genom sfären noll.

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot N \, dS = & \iint_{H_1} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot N \, dS + \iint_{H_2} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot N \, dS \\ & = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d + \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d - \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.\end{aligned}$$

där γ_1 och γ_2 är cirkeln γ, men orienterade åt olika håll för vara positivt orienterade som rand till H_1 respektive H_2.

Observera att det räcker att $\mathbf{F}$ är kontinuerligt deriverbar för använda Stoke's sats.

(b) Med hjälp av divergenssatsen ser vi att flödet ut ur sfären genom att integrera divergensen av $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ över klotet som innesluts i sfären. Eftersom $\mathbf{F}$ är två gånger kontinuerligt deriverbara kan vi beräkna flödet som

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot N \, dS = \iiint_K \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} \, dxdydz = 0$$

eftersom

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} &= \operatorname{div} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} = 0\end{aligned}$$

där vi använt att

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x}, \qquad \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x}.$$

i och med att $\mathbf{F}$ är kontinuerligt deriverbar två gånger.

9. Arean av triangeln som ges av punkterna på enhetscirkeln med hörn i punkterna som i polära koordinater ges av $[1,\alpha]$, $[1,\beta]$ och $[1,\gamma]$ ges av
$$A = \frac{1}{2}(|\sin(\alpha-\beta)| + |\sin(\beta-\gamma)| + |\sin(\gamma-\alpha)|).$$
Bestäm den genomsnittliga arean av alla trianglar som har sina hörn på enhetscirkeln.

(4 p)

Lösningsförslag. För att bestämma medelvärdet integrerar vi arean $A(\alpha,\beta,\gamma)$ över området för parametrarna, dvs kuben K som ges av $0 \le \alpha,\beta,\gamma \le 2\pi$, som har volym $8\pi^3$. Vi skriver upp integralen
$$\iiint_K A\, d\alpha d\beta d\gamma = \frac{1}{2}\iiint_K (|\sin(\alpha-\beta)| + |\sin(\beta-\gamma)| + |\sin(\gamma-\alpha)|)\, d\alpha d\beta d\gamma.$$
och ser att de tre termerna av symmetriskäl har samma värde. Det räcker alltså att beräkna integralen av den första termen. Den beror inte på γ och därmed har vi
$$\iiint_K |\sin(\alpha-\beta)|\, d\alpha d\beta d\gamma = 2\pi \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |\sin(\alpha-\beta)|\, d\alpha d\beta.$$
För att hantera beloppstecknet kan vi först konstatera att integralen över området $0 \le \alpha,\beta \le 2\pi$ på grund av periodiciteten hos $\sin x$ är lika med integralen över området $\beta \le \alpha \le \beta + 2\pi$ och $0 \le \beta \le 2\pi$. Detta område kan i sin tur delas in i två områden beroende på om $\alpha \le \beta + \pi$. Av symmetriskäl är värdet av integralerna över dessa två delområden lika och vi beräknar den ena genom
$$\int_0^{2\pi}\int_\beta^{\beta+\pi} |\sin(\alpha-\beta)|\, d\alpha d\beta \int_0^{2\pi}\int_\beta^{\beta+\pi} \sin(\alpha-\beta)\, d\alpha d\beta$$
$$= \int_0^{2\pi} [-\cos(\alpha-\beta)]_\beta^{\beta+\pi}\, d\beta = \int_0^{2\pi} 2 d\beta = 4\pi.$$
Sammantaget får vi trippelintegralens värde till $3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot 4\pi = 24\pi^2$ och den genomsnittliga arean av en triangel med hörn på enhetscirkeln blir därmed
$$\frac{24\pi^2}{8\pi^3} = \frac{3}{\pi}.$$

Svar. Den genomsnittliga arean för trianglar med hörn på enhetscirkeln är $\dfrac{3}{\pi}$ areaenheter.