Namn: .... Personnummer: ....

Övningslappskrivning 1: Lösningsförslag

Fredag 4 mars 2016 10:15-11:45
Differential- och integralkalkyl II, del 2, SF1603, Flervariabelanalys
Inga hjälpmedel är tillåtna.
Max: 12 poäng

1. (4 poäng) Avgör om följande gränsvärde existerar och beräkna gränsvärdet om det existerar:
$$\lim_{(x,y)\to(0,3)} (1+\sin x)^{\frac{y^2}{x}}.$$

Lösning: L'Hôpital's regel ger
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos x}{1+\sin x}}{1} = 1.$$
Alltså gäller
$$\lim_{(x,y)\to(0,3)} (1+\sin x)^{\frac{y^2}{x}} = \lim_{(x,y)\to(0,3)} e^{\frac{y^2}{x}\ln(1+\sin x)} = e^{3^2\cdot 1} = e^9.$$

2. (4 poäng) Låt $\mathcal{P}$ vara planet definierat av ekvationen $2x+7y+2z=0$. Hitta alla punkter på ytan
$$\left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = xy^3 + \frac{8}{y} \right\}$$
i vilka tangentplanet är parallellt med $\mathcal{P}$.

Lösning: Planet $\mathcal{P}$ har normalvektorn $\mathbf{n} = (2,7,2)$. Ytan $z = xy^3 + \frac{8}{y}$ är nivåkurvan $F=0$ där
$$F(x,y,z) = xy^3 + \frac{8}{y} - z.$$
Gradienten
$$\nabla F = \left(y^3, 3xy^2 - \frac{8}{y^2}, -1\right)$$
är vinkelrät mot tangentplanet i varje punkt på ytan $F=0$. Alltså består problemet i att hitta alla punkter $P=(x,y,z)$ på ytan där ∇F och $\mathbf{n}$ är parallella. Nu är $\nabla F = \lambda\mathbf{n}$ med $\lambda\in\mathbb{R}$ om och endast om
$$\begin{cases} y^3 = 2\lambda, \\ 3xy^2 - \frac{8}{y^2} = 7\lambda, \\ -1 = 2\lambda, \end{cases} \qquad \text{dvs} \qquad \begin{cases} y^3 = -1, \\ 3xy^2 - \frac{8}{y^2} = -\frac{7}{2}, \\ \lambda = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$
Alltså måste vi ha $y=-1$ och $x=\frac{3}{2}$. För dessa x och y värden får vi $z = xy^3 + \frac{8}{y} = -\frac{19}{2}$. Det följer att tangentplanet är parallellt med $\mathcal{P}$ endast i punkten
$$(x,y,z) = \left(\frac{3}{2}, -1, -\frac{19}{2}\right).$$

3. (4 poäng) Definiera $F : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ enligt $F(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$.

(a) Beräkna $J(2, \frac{\pi}{4})$ där $J(r, \theta)$ betecknar funktionaldeterminanten för F i punkten (r, θ).

Lösning: Funktionalmatrisen är

$$F'(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial r} & \frac{\partial F_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial F_2}{\partial r} & \frac{\partial F_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Detta ger funktionaldeterminanten

$$J(r,\theta) = \det F'(r,\theta) = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

Alltså är $J(2, \frac{\pi}{4}) = 2$.

(b) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\text{Area}(F(R(h,k)))}{\text{Area}(R(h,k))},$$

där $R(h,k) \subset \mathbb{R}^2$ är rektangeln

$$R(h,k) = \left\{ (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2 \le r \le 2+h,\ \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4} + k \right\}$$

och $F(R(h,k))$ är bilden av $R(h,k)$ under F.

Lösning: Enkel geometri ger $\text{Area}(R(h,k)) = hk$ och

$$\begin{aligned} \text{Area}(F(R(h,k)) &= \pi(2+h)^2\frac{k}{2\pi} - \pi \cdot 2^2 \frac{k}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2}((4+4h+h^2)k - 4k) \\ &= \frac{4hk + h^2k}{2}. \end{aligned}$$

Detta ger

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\text{Area}(F(R(h,k)))}{\text{Area}(R(h,k))} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{4hk+h^2k}{2hk} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left(2 + \frac{h}{2}\right) = 2.$$

Observera att gränsvärdena i uppgift (a) och (b) är lika i enlighet med att funktionaldeterminanten $J(r,\theta)$ anger avbildningen F's lokala areaförstoringen i punkten (r,θ).