



KTH Engineering Sciences

## Projekt-uppgifter

---

### Contents

1	Varpan	2
2	Motordrivna inversa pendeln	3
3	* Rymdskeppet	4
4	* Strömkretsen	5
5	** Partikeln i fältet	7
6	* Naturen — växter, möss och ormar	9
7	* Ljudvågor under vattnet och ubåtsjakt	11
8	* Vindkastet	13
9	Flödespaketet — partikelström förbi en cylinder	14

---

*Tvåstjärnig uppgift klassas som svår. Uppgift med en stjärna klassas som svår eller lätt beroende på om man gör utvidgningen eller avstår från den.*

## 1 Varpan

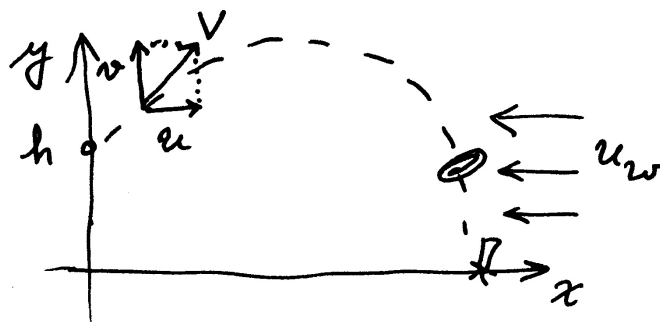
I varpaspel kastar man en flat sten och det gäller att träffa en målsticka som är nedsatt i marken tjugo meter bort. Kaströrelsen beskrivs av differentialekvationen

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + K \frac{d\mathbf{x}}{dt} \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| = \mathbf{f},$$

där  $\mathbf{x} = (x, y)$  [m] är stenens position,

$\mathbf{f} = (0, -9.81)$  [m/s<sup>2</sup>] är gravitationskraften,  $|\cdot|$  betecknar euklidiska längden, och matrisen

$$K = \begin{pmatrix} 0.020 & 0 \\ 0 & 0.065 \end{pmatrix} \text{ [m}^{-1}\text{]}$$



ger varpastenens luftmotståndskonstanter (skalad med massan) i  $x$ - och  $y$ -led.

Stenen kastas med hastigheten  $|\mathbf{x}'(0)| = 19.0$  m/s från 1.50 meters höjd. Varpan nedslagspunkt beror av kastvinkeln  $\alpha$ . Ett kast simuleras genom att man anger en kastvinkel och löser differentialekvationerna med Runge-Kuttas metod tills varpan tar mark (t o m hamnar nedanför marknivån  $y = 0$ ). Använd linjär (eller bättre) interpolation av de uträknade positionerna och tidpunkterna för att hitta den precisa tidpunkten och  $x$ -koordinaten för nedslagspunkten.

Problemet att bestämma vilken kastvinkel som ger vinnande varpakast med nedslag vis målstickan utgör ett ekvationslösningsproblem. Skriv en effektiv algoritm, baserad på tex sekantmetoden eller intervallhalvering, som beräknar den vinnande kastvinkeln. Rita också upp kastbanan. Tänk på att det finns två lösningar till varpaproblemet — en hög och en låg bana.

Diskutera (med hjälp av numeriska experiment) hur de numeriska metoderna och andra eventuella osäkerheter påverkar tillförlitligheten i vinkelresultatet.

Interpolera sedan i de ovan erhållna och lagrade kastbanevärdena (vektorerna för  $t, x, y, x', y'$ ) för att åstadkomma en tabell där kasthöjden skrivs ut för varje meter i  $x$ -led. Visualisera också resultatet genom att plotta kastbanan tillsammans med markeringar av varpans höjdläge vid varje meter.

### Kast i motvind

Om man kastar i hård motvind  $u_w$  i  $x$ -led är det stenens hastighet relativt luften som bestämmer luftmotståndet. Differentialekvationen blir då

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + K \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} - \mathbf{u} \right) \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} - \mathbf{u} \right| = \mathbf{f}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_w \\ 0 \end{pmatrix}.$$

I detta fall krävs en högre hastighet vid utkastet för att varpan ska ha möjlighet att nå tjugo meter. Gör egna numeriska simuleringar med några olika  $u_w = 2, 10, 20$  och visa bankurvor över vinnande kast i motvind med de data som du valt.

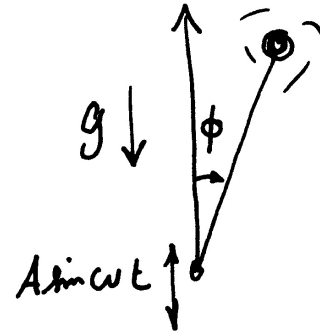
## 2 Motordrivna inversa pendeln

Modifierad version av uppgift P8-13 i Kahaner-Moler-Nash.

A famous problem of nonlinear mechanics is known as the inverted pendulum. The pendulum is a light stiff bar of length  $L$  with a point mass at the end, supported at the other end by a frictionless pin. The support pin is given a rapid up-and-down motion  $s(t) = A \sin \omega t$  by an electric motor.

An application of Newton's second law of motion yields (after neglecting a small term) the equation of motion

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{1}{L} (g - A\omega^2 \sin \omega t) \sin \phi$$



where  $\phi$  is the angular position of the bar ( $\phi = 0$  when the bar is directly above the pin) and  $g = 9.81 \text{ [m/s}^2\text{]}$  is the acceleration due to gravity.

### Pendulum period

For  $A = 0$  it is the pendulum equation  $\phi'' = \frac{g}{L} \sin \phi$ . Even this equation is not solvable in terms of elementary functions. But it is known that when  $A = 0$  and the pendulum is released from rest, i.e.  $\phi'(0) = 0$ , the period  $T$  of the pendulum is given by

$$T = 2\sqrt{\frac{L}{g}} K\left(\frac{\phi(0)}{2}\right) \quad \text{where} \quad K(u) = \int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{1 - \cos^2(u) \sin^2 x}}$$

Use the Runge-Kutta 4 method to compute the motion  $\phi(t)$  and to find the period (some interpolation may be needed) when  $A = 0$ ,  $L = 0.4$ ,  $\phi(0) = \pi/4$  and  $\phi'(0) = 0$  (this is an ordinary pendulum).

Compare the period computed by your Runge-Kutta program with the value of  $T$  above computed by an efficient numerical integration method.

### Inverted pendulum

The most interesting aspect of the pendulum problem when  $A \neq 0$  is that for some  $A$  and  $\omega$ -values an inverted pendulum stays pointing upwards; the upward pointing state becomes *stable!* This has also been observed experimentally. Make computer simulations for a stick of length 400 mm ( $L = 0.4$ ) which is initially released from rest at the angle  $5^\circ$  ( $\phi(0) = 5\pi/180$ ). Use the RK4 method to compute the motion  $\phi(t)$  for different values of amplitude:  $A = 0.18, 0.20, 0.22, 0.24$ , and a number of  $\omega$ -values:  $\omega = 14, 16, 24, 34, 44, 54$ . Let  $T_s = 2\pi/\omega$ . Try the time-steps:  $\Delta t = T_s/n$  with  $n = 50$  and  $n = 100$  and solve for  $0 \leq t \leq 30T_s$ . (You may also stop when the value of  $\phi$  is less than  $-\pi$  or greater than  $\pi$ , why?)

Plot  $\phi$  and  $\phi'$  as functions of  $t$  as well as  $\phi'$  against  $\phi$  (the phase plane). Also plot a trace of the free end of the stick ( $y$  against  $x$ ).

Investigate the exciting behaviour at  $A = 0.20$  further for  $\omega$ -values in the interval  $30 < \omega < 55$ .

### 3 \* Rymdskeppet

Trots att raketmotorn går för fullt förblir rymdskeppet hängande orörlig på höjden  $H$  över jordytan. Kaptenen låter rymdskeppet vrida sig nittio grader från det tidigare radiellt riktade läget, och i fortsättningen verkar raketmotorn horisontellt (vinkelrätt mot Ortsvektorn) med oförminskad kraft. Störtar rymdskeppet eller klarar det sig ut i rymden?

Med lämpliga enheter — längdenhet jordradie och tidsenhet timme — lyder Newtons rörelseekvationer uttryckta i polära koordinater:

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 = G \cos \alpha - \frac{g}{r^2}$$

$$r \frac{d^2\phi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} = G \sin \alpha$$

där  $g = 20.0$  jordradier/tim<sup>2</sup> är tyngdaccelerationen vid jordytan, och  $G = g/(1 + H)^2$  är tyngdaccelerationen på höjden  $H$  där rymdskeppet blev hängande. Vinkeln  $\alpha$  var noll före vridningen men blir  $90^\circ$  efter kaptenens manöver (vid tiden  $t = 0$ ). De nödvändiga begynnelsevärdena för  $r$ ,  $r'$ ,  $\phi$ ,  $\phi'$  vid  $t = 0$  ges av det faktum att rymdskeppet var helt stilla på höjden  $H$  då kaptenen ändrade banriktning.

Skriv ett program som med Runge-Kuttas metod eller `ode45` löser differentialekvationerna under så lång tid att det står klart om rymdskeppet störtar eller försvinner ut i rymden. Rymdskeppet befinner sig på några jordradiers höjd då kaptenen gör manövern. Undersök först vad som händer om starthöjden  $H$  är två jordradier, pröva sedan hur banan blir vid några andra val av starthöjder. Experimentera dig fram till lagom sluttid och lämpligt tidssteg/lämplig tolerans. Fundera ut en bra algoritm som med god noggrannhet och lämplig interpolation bestämmer tidpunkt och positionsangivelse ( $t_p$ ,  $\phi_p$ ,  $r_p$ ) för banans allra lägsta punkt.

Uppgiften är nu att med en effektiv algoritm, tex sekantmetoden eller intervallhalvering, räkna fram gränsfallets  $H$ -värde, dvs rymdskeppets starthöjd  $H_*$  som leder till en bana utan att katastrofen blir ett faktum. Bestäm hastigheten som rymdskeppet sveper förbi jordytan med i detta fall. Rita bankurvan från begynnelseläget till platsen där raketten just passerar grantopparna. Beräkna denna bankurvas längd fram till denna punkt, alltså rymdskeppets tillryggalagda sträcka. Gör tillförlitlighetsbedömning av de erhållna resultaten! Undersök hur felen i resultatet påverkas av de olika felkällorna: lösning av begynnelsevärdesproblem, interpolation, etc.

#### Utvidgning

Om kaptenen vid sin manöver inte lyckas vrida rymdskeppet  $90^\circ$ , hur mycket påverkar det raketbanan? Gör simuleringar med vridningsvinklarna  $\alpha = 70, 80, 90, \dots, 130^\circ$  och studera hur det kritiska  $H_*$ -värdet ändras, likaså hastigheten vid jordpassagen. Rita bankurvorna. För vilken vridningsvinkel kommer raketten att få maximal hastighet vid jordytan och vad är maxvärdet? Använd *gyllene snittet*<sup>1</sup> för att bestämma vinkeln och maxhastigheten.

<sup>1</sup> Läs om optimering i en dimension med hjälp av denna algoritm, tex i *Numeriska algoritmer med Matlab*, avsnitt 7.1, skriven av Gerd Eriksson (tillgänglig på kurswebben).

#### 4 \* Strömkretsen

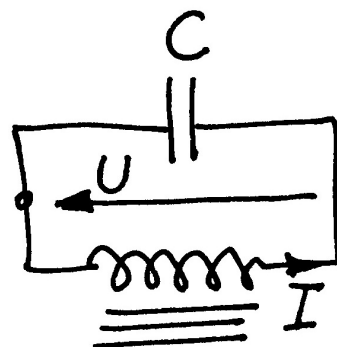
En enkel strömkrets består av en kondensator och en spole. Kondensatorn är uppladdad till spänningen  $U_0$ . Spolen innehåller järn och har strömberoende induktans:

$$L = L_0 / (1 + I^2). \quad (1)$$

Vid tiden  $t = 0$  sluts kretsen och strömmen bestäms sedan av två samband:

$$\text{Spänningen över induktansen:} \quad U = L \frac{dI}{dt} \quad (2)$$

$$\text{Strömmen genom kondensatorn:} \quad I = -C \frac{dU}{dt} \quad (3)$$



Visa att följande differentialekvation kan härledas ur uttrycken ovan (efter derivering av första uttrycket):

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = \frac{2I}{1 + I^2} \left( \frac{dI}{dt} \right)^2 - \frac{I(1 + I^2)}{L_0 C}$$

Vid tiden  $t = 0$  gäller  $I = 0$  och  $dI/dt = U_0/L_0$ . Lösningen  $I(t)$  till differentialekvationen är en periodisk funktion som är mer eller mindre sinusliknande beroende av hur  $U_0$ -värdet väljs. Visa att för lösningen till begynnelsevärdesproblemet gäller

$$E(t) = CU(t)^2 + L_0 \ln(1 + I(t)^2) = \text{konstant},$$

tex genom att derivera uttrycket för  $E$  och utnyttja (1), (2) samt (3).

Gällande data är  $L_0 = 1$  H,  $C = 1 \mu\text{F}$ . Några olika värden på  $U_0$  ska prövas, dels spänningen 240 V då järnkärnans inflytande är nästan försumbart, dels två höga spänningvärden 1200 V och 2400 V då strömkurvan inte blir särskilt sinuslik längre.

Använd Runge–Kutta 4 för att beräkna och rita strömkurvorna. Plotta också  $E(t)$  och verifiera att den är konstant. Fundera ut en bra algoritm för att bestämma strömmens toppvärde  $I_{\max}$  och för att med mycket god precision beräkna svängningstiden  $T$ . Gör tillförlitlighetsbedömning av  $I_{\max}$  och  $T$ . Undersök hur resultaten påverkas av de olika numeriska felkällorna: lösning av begynnelsevärdesproblem, interpolation, etc.

Före den numeriska behandlingen kan det vara bra att bedöma storleksordningen på svängningstiden. Det är lätt att räkna ut frekvensen och svängningstiden för en krets med konstant  $C$  och konstant  $L = L_0$ .

#### Fourieranalys – anpassning med trigonometriskt polynom

Programmet ska göra en fourieranalys av strömkurvan, det vill säga beräkna koefficienterna  $a_k$  i fourierutvecklingen av  $I(t)$ :

$$I(t) = a_1 \sin \omega t + a_2 \sin 2\omega t + a_3 \sin 3\omega t + \dots, \quad \text{där } \omega = 2\pi/T$$

(Att det inte blir några cosinustermer i utvecklingen följer av att funktionen  $I(t)$  är udda.)

För koefficienterna i formeln gäller:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T I(t) \sin(k\omega t) dt, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Använd trapetsregeln för att beräkna integralen numeriskt.<sup>2</sup> Beräkna de 14 första fourierkoefficienterna. Om strömmen är nästan sinusformad bör alla koefficienter utom den första vara mycket små, stämmer det? Det symmetriska utseendet hos strömkurvan gör att vissa fourierkoefficienter är noll (teoretiskt i alla fall). Vilka är det och hur väl stämmer teori och praktik?

Rita i samma figur upp strömkurvan samt resultatet av fourierutvecklingen, dels då bara de tre första termerna tas med, dels då alla fjorton finns med.

### Utvidgning

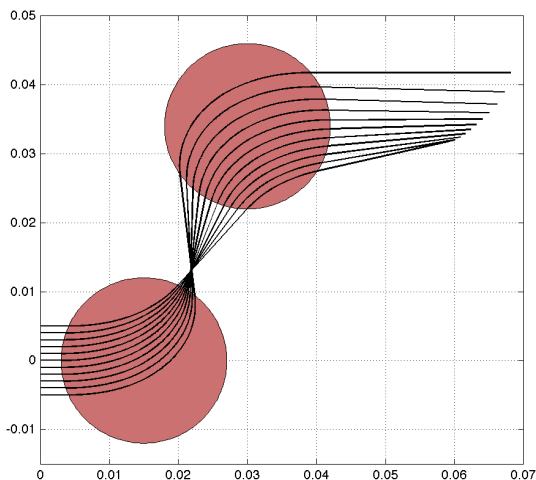
Det kommer ett krav att strömmen i kretsen inte får överstiga 10 A. Beräkna med en effektiv lösningsmetod, tex sekantmetoden eller intervallhalvering, det spänningsvärde  $U_0 = U_0^*$  som ger  $I_{\max} = 10$  A. Man har möjlighet att variera spolens  $L_0$ -värde och vill därför för en krets som uppfyller kravet  $I_{\max} = 10$  undersöka beroendet mellan  $U_0^*$  och  $L_0$ . Beräkna och markera i ett diagram  $U_0^*$  för  $L_0 = 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 2.0$  H.

---

<sup>2</sup> Trapetsregeln är speciellt bra när integranden är periodisk; läs gärna mer om detta tex i *Numeriska algoritmer med Matlab*, avsnitt 5.2.4, skriven av Gerd Eriksson (tillgänglig på kurswebben).

## 5 \*\* Partikeln i fältet

Laddade partiklar rör sig med hög hastighet in i ett område där det finns två elektromagnetiska kraftfält. Vid passagen inuti de båda kraftfälten kröks partikelbanorna. Utanför kraftfälten är banorna rätlinjiga. Fälten finns inom två cirkulära cylindrar båda med radien  $R$  och med axlarna parallella med  $z$ -axeln, mittpunkter vid  $x = a_1, y = b_1$ ) respektive  $x = a_2, y = b_2$ ). Det elektriska fälten i cylindrarna är  $\mathbf{E}_1 = E\mathbf{e}_x$  respektive  $\mathbf{E}_2 = -E\mathbf{e}_x$ , med konstant fältstyrka  $E$ . De magnetiska fälten är riktade i  $z$ -led och är starkast i mitten,



$$\mathbf{B}_1 = B \left(1 - w \frac{r_1^2}{R^2}\right) \mathbf{e}_z, \quad \text{respektive} \quad \mathbf{B}_2 = -B \left(1 - w \frac{r_2^2}{R^2}\right) \mathbf{e}_z,$$

där

$$r_1 = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2},$$

och  $w$  är en viktfaktor med ett värde mellan 0 och 0.5. Om partikels position vid tiden  $t$  beskrivs med vektorn  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  så gäller följande differentialekvation för partikelrörelsen:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = Q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}),$$

där  $m$  är partikels massa och  $Q$  dess laddning.

Betrakta först rörelsen för *en* partikel. Den har hastigheten  $v_0$  när den kommer farande längs negativa  $x$ -axeln i positiv riktning. Vi börjar studera rörelsen när den passerar origo. Om partikels hastighetskomponent i  $z$ -led är noll utanför fälten så förblir den noll inuti de ovan beskrivna fälten; partikelbanan blir plan och kan beskrivas med enbart  $x$ - och  $y$ -koordinater. I detta fall erhålls differentialekvationerna

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{Q}{m} \left( E + \left(1 - w \frac{r_1^2}{R^2}\right) B \frac{dy}{dt} \right) \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{Q}{m} \left(1 - w \frac{r_1^2}{R^2}\right) B \frac{dx}{dt},$$

om partikeln befinner sig i första kraftfältet. Härled dessa uttryck ur kryssproduktsformeln ovan. På motsvarande sätt erhålls uttrycken inom andra kraftfältet. Utanför cirklarna (som cylindrarna nu reducerats till) gäller  $m\mathbf{r}'' = 0$ , dvs partikelrörelsen blir rätlinjig.

Vår studie gäller elektroner med massan  $m = 9.1091 \cdot 10^{-31}$  kg och negativ laddning  $Q = -1.6021 \cdot 10^{-19}$  C. Hastigheten är  $v_0 = 455 \cdot 10^3$  m/s. Övriga data:  $E = 20.0$  V/m,  $B = 0.92 \cdot 10^{-4}$  Wb/m<sup>2</sup>,  $R = 0.012$  m,  $a_1 = 0.015$ ,  $b_1 = 0$ ,  $a_2 = 0.030$ ,  $b_2 = 0.034$ . Viktfaktor  $w = 0.2$ .

Beräkna elektronens bana från  $x = 0$  tills den med god marginal lämnat den andra cylinderns kraftfält. Utnyttja kunskapen om rätlinjig rörelse utanför kraftfälten med ekvationslösning för skärning mellan rät linje och cirkel. Använd en egen RK4-metod för lösning av ode-systemet inuti kraftfälten och utför lämplig interpolation för att erhålla elektronens position precis vid utgången av varje fält. Prova dig fram till lagom tidssteg som ger acceptabel noggrannhet och motivera det valda steget!

Låt nu tre elektroner alla med hastigheten  $v_0$  i  $x$ -riktningen komma in i parallella banor; startpositioner vid  $t = 0$  är  $x = 0$  och  $y = -0.002, 0, 0.002$ . Beräkna och rita de tre elektronbanorna med samma viktfaktor  $w = 0.2$  som ovan. Efter passagen genom kraftfälten är banorna inte parallella längre. Genom att förflytta det andra fältet i  $y$ -led (alltså ändra  $b_2$ -värdet) kan man åstadkomma att banorna för elektron nr 1 och 3 blir parallella igen. Använd en effektiv algoritm, tex sekantmetoden eller intervallhalvering, för att bestämma denna cylinderplacering.



## 6 \* Naturen — växter, möss och ormar

Vid början av år noll planteras 100 exemplar av en nyttoväxt på en bördig ö. Beståndet utvecklar sig snabbt med tiden enligt

$$dV/dt = a_1V - a_2V^2,$$

där  $V(t)$  är antalet växter vid tiden  $t$  (tidsenheten är år). Konstanterna är  $a_1 = 16$  och  $a_2 = 1.8 \cdot 10^{-5}$ . Differentialekvationen är analytiskt lösbar (separabel) men kan förstås också lösas numeriskt. Man finner att då  $t$  ökar så närmar sig  $V(t)$  ett konstant slutvärde, vilket?

Låt tidpunkten vara  $T_1$  då antalet växter stigit till 95% av slutvärdet. Ange hur många dagar efter inplanteringen som detta uppnås. Använd RK4 med tidssteget en dag, alltså  $dt = 1/365$ , för att finna dagen. Men pröva dessutom om RK4 med tidssteget en vecka (och viss interpolation) leder till samma dag.

Just den dagen anländer två växtätande djur - de klassificera som skadedjur  $S$  - till ön (man kan väl tänka sig ett par möss). Samspelet mellan växterna och djuren kan beskrivas med följande differentialekvationer, där  $S(t)$  betecknar antalet skadedjur:

$$\begin{aligned}dV/dt &= a_1V - a_2V^2 - a_3VS \\dS/dt &= -b_1S^{1.4} + b_2V^{0.6}S^{0.8}\end{aligned}$$

I växtekvationen tillkommer termen  $-a_3VS$  som effekt av att skadedjuren dykt upp, konstanten  $a_3 = 0.011$ . Djuren har svårigheter att öka ju fler de är, därav den negativa första termen i  $dS/dt$ , konstanten är  $b_1 = 2.0$ , Djurantalet ökar däremot när de har möjlighet att utnyttja födan; i den positiva andra termen gäller  $b_2 = 0.085$ .

Lösningen till detta differentialekvationssystem går, då  $t \rightarrow +\infty$ , mot en konstant som inte beror på begynnelsevillkoren. Sätt derivatorna lika med noll och lös det ickeinjära system som ger slutvärdena för  $V$  och  $S$ .

Lös differentialekvationerna numeriskt med lämplig metod fram till tidpunkten  $T_2 = 1.5$  (d v s ett och ett halvt år efter växtplanteringen). Har antalet växter och skadedjur hunnit stabilisera sig? Hur många procent (eller promille) avviker deras värden från slutvärdena?

Vid denna tid införs rovdjur  $R$  (ett ormpar) på ön för att hålla de växtätande mössens antal nere och därmed öka mängden av växter. Man får ett differentialekvationssystem där växtekvationen är oförändrad (ormarna äter inte växterna). Skadedjurs- och Rovdjurs-ekvationerna blir nu

$$\begin{aligned}dS/dt &= -b_1S^{1.4} + b_2V^{0.6}S^{0.8} - b_3SR \\dR/dt &= -c_1R + c_2S\sqrt{R}.\end{aligned}$$

Med lämpligt valda värden på konstanterna i modellen gäller även här att  $V$ ,  $S$  och  $R$  för stora  $t$ -värden närmar sig en konstant stabil lösning. Låt  $b_3 = 1.5$ ,  $c_1 = 2.0$  och  $c_2 = 0.025$ . Beräkna som ovan slutvärdena för  $V$ ,  $S$  och  $R$ .

Lös differentialekvationssystemet tills tre år gått sedan växterna planterades,  $T_3 = 3$ . Hur nära sina slutvärden har de inblandade parterna nått?

### Hjälper besprutning?

Öborna som utnyttjar växterna och vill skörda frukterna är ändå inte nöjda — man tycker att skadedjuren äter för mycket. Vid tidpunkten  $T_3$  beslutar man sig för en årlig besprutningskampanj, som är så anpassad att 70 procent av skadedjuren dödas vid varje års besprutning som sker alldeles i slutet av året. Effekten är tyvärr sådan att även rovdjursstammen drabbas, 20 procent av rovdjuren dödas samtidigt varje år av giftet.

Lös alltså differentialekvationssystemet med besprutning varje år införd. Efter någon tid har bestånden stabiliserats till nya värden (en periodisk lösning uppstår). Har öborna gjort rätt? Studera växtbeståndet under ett år före och efter besprutningskampanjen.

Hur känslig är denna ekologiska modell för störningar i koefficienterna? Gör några numeriska experiment med små (eller kanske stora) förändringar i någon eller några koefficienter och undersök hur resultatet blir! För vilken koefficient är  $V$  känsligast? Experimentera också med andra besprutningsmedel som påverkar skadedjurs- och rovdjursbestånden annorlunda än det först prövade giftet.

### Utvidgning

Man kan hitta den periodiska lösningen genom att köra flera (många?) år. Men man kan också hitta den genom att leta reda på de startvärden  $S(0), R(0)$  som ger  $S(1) = S(0), R(1) = R(0)$  där besprutningen räknats med vid  $t = 1^-$ . Man skördar vid slutet av året alla växter utom 100, så  $V(0) = 100$ . Det är ett ekvationssystem  $\mathbf{F}(s, r) = 0$  med två obekanta, där

$$\mathbf{F}(S(0), R(0)) = \begin{pmatrix} S(1) - S(0) \\ R(1) - R(0) \end{pmatrix}.$$

Lös detta med Newtons metod och differens-approximation till Jacobi-matrisen, dvs byt den exakta Jacobi-matrisen mot

$$\tilde{\mathbf{J}}(s, r) = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{F}(s+h, r) - \mathbf{F}(s, r)}{h} & \frac{\mathbf{F}(s, r+h) - \mathbf{F}(s, r)}{h} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad h \ll 1.$$

Notera att både  $\mathbf{F}$  och  $\tilde{\mathbf{J}}$  kan evalueras genom att lösa ODE-systemet.

## 7 \* Ljudvågor under vattnet och ubåtsjakt

Modifierad version av uppgift P8-15 i Kahaner-Moler-Nash.

The speed of sound in ocean water depends on pressure, temperature and salinity, all of which vary with depth in fairly complicated ways. Let  $z$  denote depth in feet under the ocean surface (so that the positive  $z$  axis points down) and let  $c(z)$  denote the speed of sound at depth  $z$ . We shall ignore the changes in sound speed observed in horizontal directions. It is possible to measure  $c(z)$  at discrete values of  $z$ ; typical results can be found in the table. We need  $c(z)$  and also  $c'(z)$  between data points. Fit the data in a least-squares sense with the non-linear model function

$$c(z) = 4800 + p_1 + p_2 \frac{z}{1000} + p_3 e^{-p_4 z/1000}.$$

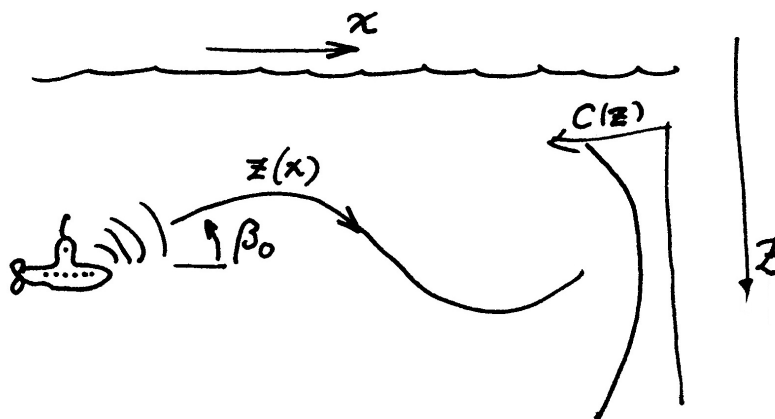
Use the Gauss–Newton method to do this.<sup>3</sup> To obtain startguesses, solve the linear least squares problem where  $p_4 = 1$ . Make a plot over the data points and the received model curve  $c(z)$ . Since the sound speed varies with depth, sound rays will travel in curved paths. A fixed underwater point emits rays in all directions. Given a particular point and initial direction we would like to follow the ray path. Thus letting  $x$  be the horizontal coordinate we know the initial values:  $x = 0$ ,  $z = z_0$ ,  $dz/dx = \tan \beta_0$ , where  $\beta_0$  denotes the angle between the horizontal line  $z = z_0$  and the ray in the start point.

The ray path  $z(x)$  is described by the following second order differential equation

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -q_0 \frac{c'(z)}{c(z)^3} \quad (4)$$

where  $q_0 = (c(z_0)/\cos \beta_0)^2$ . Use the Runge-Kutta method (or ode45) to trace the ray beginning at  $z_0 = 2000$  feet and  $\beta_0 = 7.8$  degrees.

$z$	$c(z)$
0	5050
500	4980
1000	4930
1500	4890
2000	4870
2500	4865
3000	4860
3500	4860
4000	4865
5000	4875
6000	4885
7000	4905
8000	4920
9000	4935
10000	4950
11000	4970
12000	4990



<sup>3</sup>Läs som hur man löser icke-linjära minstakvadratproblem med Gauss–Newton tex i *Numeriska algoritmer med Matlab*, avsnitt 6.10, skriven av Gerd Eriksson (tillgänglig på kurswebben).

Follow the ray for 25 nautical miles (1 nautical mile is 6076 feet). Plot the curve  $z(x)$ . You should find that the depth at  $x_f = 25$  nautical miles is close to 2500 feet.

Now suppose that a sound source at a depth of 2000 feet transmits to a receiver 25 miles away at a depth of 2500 feet. The above calculation shows that one of the rays from the source to the receiver leaves the source at an angle close to 7.8 degrees. Because of the nonlinearity of the equation there may be other rays leaving at different angles that reach the same receiver. Run your program for  $\beta_0$  in the range from  $-10$  up to 14 degrees, plot the ray paths and print a table of the values  $z(x_f)$ .

We are interested in finding values of  $\beta_0$  for which  $z(x_f) = 2500$ . Use an efficient algorithm, like bisection or the secant method, to determine the rays which pass through the receiver. Discuss the accuracy of your results.

### Utvidgning

To compute the time it takes for sound to propagate along a ray we add another ODE for the time  $T(x)$ ,

$$\frac{dT}{dx} = \frac{\sqrt{q_0}}{c(z)^2}.$$

Note that this ODE is coupled to the one for  $z$  in (4). Compute the time it takes for a sound pulse to travel from the source to the receiver along the different rays you found above. A listener at the receiver will hear the same sound pulse arrive several times with some distinct intervals between. Sort the travel times and determine the length of these intervals.

At a listening station for the receiver an operator detects a noise from a submarine. The noise is repeated four times. The interval between the first two noises is 0.095 seconds. Then there is another 0.024 seconds delay till the next one. The last signal is lost. From this data you can determine the location of the submarine. This is your task. As a help, the submarine is not too far from the source used above.

This problem boils down to solving a nonlinear system of equations. The unknowns in the equations are the  $x$ - and  $z$ -coordinates of the submarine, i.e. the initial point of the rays. Given any such pair, you can use your solution methods above to compute the time interval  $\Delta t_1$  between the first and second ray hitting the receiver, and  $\Delta t_2$  between the second and third ray. In this way, a vector valued function  $\mathbf{F}(x, z)$  is defined,

$$\mathbf{F}(x, z) := \begin{pmatrix} \Delta t_1 \\ \Delta t_2 \end{pmatrix}.$$

(Note that for each  $(x, z)$  you first need to find the four correct angles that produce rays hitting the receiver.) Next, you use Newton's method to solve

$$\mathbf{F}(x, z) := \begin{pmatrix} 0.095 \\ 0.024 \end{pmatrix},$$

where you approximate the Jacobi matrix  $J(x, z)$  by difference quotients,

$$J(x, z) \approx \tilde{J}(x, z) = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{F}(x+h, z) - \mathbf{F}(x, z)}{h} & \frac{\mathbf{F}(x, z+h) - \mathbf{F}(x, z)}{h} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad h \ll 1.$$

Since you can evaluate  $\mathbf{F}(x, z)$  for any  $(x, z)$  (by your solution methods above) you can also evaluate  $\tilde{J}(x, z)$  for any  $(x, z)$ .

As initial data, use the location of the source  $(x_0, z_0) = (0, 2000)$ .

## 8 \* Vindkastet

En aprildag med varma sydvindar tränar Pelle bollkast på sportplanen. Han kastar i väg bollen österut med utkastvinkeln (i vertikalplanet)  $30^\circ$ , hastigheten 25 m/s och höjden 1.4 m. Pelle har fötterna i origo i ett koordinatsystem med horisontella  $x$ - och  $y$ -axlar,  $x$  åt öster,  $y$  åt norr (i vindens riktning). Differentialekvationerna för bollbanan blir

$$\ddot{x} = -q\dot{x}, \quad \ddot{y} = -q(\dot{y} - a(z)), \quad \ddot{z} = -9.81 - q\dot{z}, \quad \text{där } q = c\sqrt{\dot{x}^2 + (\dot{y} - a(z))^2 + \dot{z}^2}.$$

Luftmotståndskoefficienten  $c$  beror av bollradien och massan och är för Pelles boll  $c = 0.070$ . Vindstyrkan är 7 m/s vid marken och ökar den här aprildagen med höjden enligt:  $a(z) = 7 + 0.35z$ .

Visa hur differentialekvationerna kan skrivas om på vektorform till ett system av första ordningens differentialekvationer och ange startvektorns komponenter.

Använd en effektiv algoritm som bestämmer kastbanan tills bollen nått mark och beräknar nedslagsplatsen noggrant. Någon form av interpolation kan behövas eftersom räkningarna inte ska utföras med ett onödigt kort tidssteg. Bedöm noggrannheten i resultatet.

Rita kastbanan — plotkommandot för att rita en kurva i 3D är `plot3(x,y,z)` där  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  och  $\mathbf{z}$  är vektorer som innehåller kurvpunkternas koordinater.

Pelle vill att bollen trots vinden ska slå ned rakt österut, alltså på  $x$ -axeln. Hur ska han vända sig i kastögonblicket för att åstadkomma det? Hans utkastvinkel i vertikalplanet är fortfarande  $30^\circ$ . Utvidga programmet med en effektiv algoritm för detta, baserad på tex sekantmetoden eller intervallhalvering.

### Kast med studsar

Pelles boll studsar faktiskt när den slår ner på marken. Bollens hastighetskomponenter blir vid studsens samma i  $x$ - och  $y$ -led som de var just vid nedslaget, medan hastigheten i  $z$ -led byter tecken. Lägg på en lagom dämpning, till exempel en dämpningsfaktor på 0.80 vid varje studs. Visa en bild över bankurvan för den studsande bollens fem första studsar, när Pelle kastar i väg bollen så att första nedslaget hamnar på  $x$ -axeln.

### Utvidgning

Nu vill Pelle prova bollträff mot en liten grej på toppen av en 3.5 meter hög stolpe, 6 m österut och 2 m åt norr, alltså vid  $x_{\text{pryl}} = 6.0$ ,  $y_{\text{pryl}} = 2.0$ ,  $z_{\text{pryl}} = 3.5$ . Differentialekvationerna är oförändrade, samma boll och samma bläst. Pelle har samma position som förut men han är lite försiktigare, utkasthastigheten är 15 m/s. Pelles första försök görs med utkastvinkeln  $60^\circ$  i vertikalplanet och vridning  $15^\circ$  medurs så att näsan pekar ungefär ostsydost. Skriv en algoritm som beräknar bollbanan och med god precision (viss interpolation behövs!) anger  $y$ - och  $z$ -koordinaterna när bollen finns vid  $x = x_{\text{pryl}}$ . Du ska sedan bestämma utkastriktningen så att Pelle träffar grejen på stolpen. Det är två villkor att uppfylla vid  $x = x_{\text{pryl}}$ : rätt värden på  $y$  och  $z$  och två obekanta vinklar  $(\theta, \phi)$  att bestämma. Det leder till ett icke-linjärt ekvationssystem  $\mathbf{F}(\theta, \phi) = 0$  med två obekanta. Lös detta med Newtons metod och differensapproximation till Jacobi-matrisen, dvs byt den exakta Jacobi-matrisen mot

$$\tilde{\mathbf{J}}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{F}(\theta+h, \phi) - \mathbf{F}(\theta, \phi)}{h} & \frac{\mathbf{F}(\theta, \phi+h) - \mathbf{F}(\theta, \phi)}{h} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad h \ll 1.$$

Notera att både  $\mathbf{F}$  och  $\tilde{\mathbf{J}}$  kan evalueras genom att lösa ODE-systemet.

Rita upp stolpen och Pelles lyckade bollkast som slår ned grejen från stolpen.

## 9 Flödespaketet — partikelflöde förbi en cylinder

En långsträckt cylinder med radien  $R = 2$  befinner sig i en inkompressibel vätska som strömmar i positiv  $x$ -riktning. Cylinderns axel är vinkelrät mot flödesriktningen. Det hela kan betraktas som ett tvådimensionellt problem i rummet. Läget  $(x(t), y(t))$  för en flödespartikel vid tiden  $t$  bestäms av partikelns startposition  $(x(0), y(0))$  och av differentialekvationssystemet

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{R^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{2xyR^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Vid  $t = 0$  befinner sig fyra flödespartiklar vid  $x = -4$  med  $y$ -positionerna 0.2, 0.6, 1.0 och 1.4. Beräkna och rita deras strömningskurvor fram till tiden  $t = 12$ . Notera läget för de fyra partiklarna vid denna tidpunkt. Den understa partikeln har hamnat på efterkälken. Beräkna med en effektiv algoritm hur lång tid som krävs för att den ska nå fram till samma  $x$ -position som den översta har vid  $t = 12$ .

Vi vill nu studera hur ett paket av flödespartiklar deformeras när det strömmar förbi cylindern. Det gäller att lösa differentialekvationssystemet en tidsperiod i taget och rita en ögonblicksbild av partikelpositionerna. Låt startformationen för partikelpaketet vara en regelbunden tjugohörning med centrum i  $(-4, 1)$  och radiellt avstånd till hörnen 0.6.

Beräkna arean av varje deformerad polygon. För en sluten polygon finns följande trapetsregelliknande areaformel:

$$A = (x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + \cdots + x_ny_1 - x_1y_n)/2.$$

Plotta arean som funktion av tiden  $t$ .

Gör om beräkningarna för en fyrtyohörning och en åttiohörning. Fortsätt eventuellt med en fördubbling av antalet hörn. Vilken slutsats kan dras om partikelpaketets area under strömningen förbi cylindern?

Utför även egna experiment med annan startform på partikelpaketet och andra startpositioner i  $y$ -led.