Namn: .... Personnummer: ....

Lappskrivning 1: Lösningsförslag

Fredag 4 mars 2016 10:15-11:45
Differential- och integralkalkyl II, del 2, SF1603, Flervariabelanalys
Inga hjälpmedel är tillåtna.
Max: 12 poäng

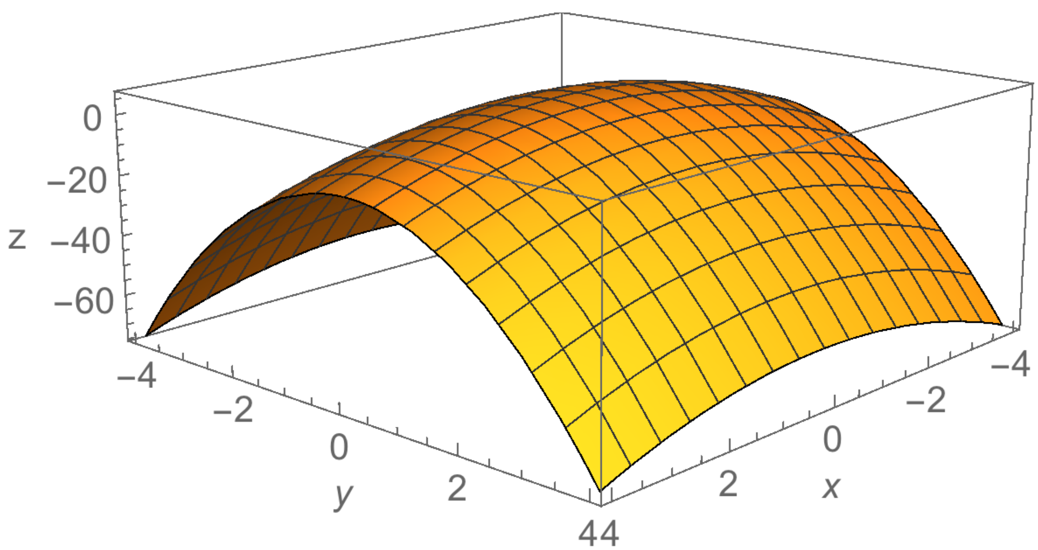
Version A

1. (4 poäng) Betrakta ytan i $\mathbb{R}^3$ som beskrivs av ekvationen

$$x^2 + 4y^2 + z - 6 = 0.$$

(a) Gör en enkel skiss av ytan. Ange vilken av de tre axlarna i din figur som är x-axel, vilken som är y-axel och vilken som är z-axel.

Lösning:



(b) Skärningen av ytan med planet $x = y$ är en kurva i $\mathbb{R}^3$. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan i punkten $\mathbf{x}_0 = (-1, -1, 1)$.

Lösning: Skärningen med planet $x = y$ är kurvan som bestäms av

$$x^2 + 4y^2 + z - 6 = 0 \quad \text{och} \quad x = y.$$

Låter vi $t := x = y$ ser vi att

$$\mathbf{r}(t) = (t, t, 6 - 5t^2), \qquad t \in \mathbb{R},$$

är en parametrisering av kurvan. Vi har $\mathbf{r}(-1) = \mathbf{x}_0$. Eftersom $\mathbf{r}'(t) = (1, 1, -10t)$, finner vi att $\mathbf{r}'(-1) = (1, 1, 10)$ är en tangentvektor till kurvan i punkten $\mathbf{x}_0$. Tangenten till kurvan i punkten $\mathbf{x}_0$ har således ekvationen

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + s\mathbf{r}'(-1),$$

dvs

$$(x, y, z) = (-1, -1, 1) + s(1, 1, 10), \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Svar: $(x, y, z) = (-1, -1, 1) + s(1, 1, 10)$ där $s \in \mathbb{R}$.

2. (4 poäng) Bestäm alla stationära punkter till polynomet

$$f(x, y) = (y^2 - 1)^2 + (x - y^2 + 1)^2.$$

Avgör för varje stationär punkt om det är en lokal max punkt, en lokal min punkt eller en sadelpunkt.

Lösning: Derivering ger

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(1 + x - y^2), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y(2y^2 - x - 2).$$

Alltså bestäms de stationära punkterna av ekvationssystemet

$$\begin{cases} 1 + x - y^2 = 0, \\ 4y(2y^2 - x - 2) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Antag först att $y \neq 0$. Då får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} 1 + x - y^2 = 0, \\ 2y^2 - x - 2 = 0, \end{cases} \qquad \text{dvs} \qquad \begin{cases} x = y^2 - 1, \\ y^2 = 1. \end{cases}$$

Det följer att $(0, 1)$ och $(0, -1)$ är stationära punkter. Antag nu att $y = 0$. Då är andra ekvationen i (1) automatiskt uppfylld medan första ekvationen ger $x = -1$. Alltså är $(-1, 0)$ en stationär punkt. Sammanfattningsvis har vi följande tre stationära punkter:

$$(0, 1), \qquad (0, -1), \qquad (-1, 0).$$

För att bestämma om dessa punkter är lokala max, lokala min eller sadelpunkter, beräknar vi

$$f''_{xx}(x, y) = 2, \qquad f''_{xy}(x, y) = -4y, \qquad f''_{yy}(x, y) = 4(6y^2 - x - 2).$$

För punkten $(0, 1)$ finner vi att

$$A := f''_{xx}(0, 1) = 2, \qquad B := f''_{xy}(0, 1) = -4, \qquad C := f''_{yy}(0, 1) = 16,$$

så att punktens karaktär bestäms av den kvadratiska formen

$$Q(h, k) := Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = 2h^2 - 8hk + 16k^2.$$

Genom att skriva

$$Q(h, k) = 2(h - 2k)^2 + 8k^2$$

ser vi att Q är positivt definit. **Det följer att** $(0,1)$ **är en lokal min punkt.** För punkten $(0,-1)$ finner vi att

$$A := f''_{xx}(0,-1) = 2, \qquad B := f''_{xy}(0,-1) = 4, \qquad C := f''_{yy}(0,-1) = 16,$$

så att punktens karaktär bestäms av den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = 2h^2 + 8hk + 16k^2.$$

Genom att skriva

$$Q(h,k) = 2(h+2k)^2 + 8k^2$$

ser vi att Q är positivt definit. **Det följer att** $(0,-1)$ **är en lokal min punkt.** För punkten $(-1,0)$ finner vi att

$$A := f''_{xx}(-1,0) = 2, \qquad B := f''_{xy}(-1,0) = 0, \qquad C := f''_{yy}(-1,0) = -4,$$

så att punktens karaktär bestäms av den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = 2h^2 - 4k^2.$$

Denna formen är indefinit. **Det följer att** $(-1,0)$ **är en sadelpunkt.**
Svar: De stationära punkterna är

$$\begin{cases} (0,1) \text{ lokal min punkt,} \\ (0,-1) \text{ lokal min punkt,} \\ (-1,0) \text{ sadelpunkt.} \end{cases}$$

3. (4 poäng) Bestäm konstanten $a \in \mathbb{R}$ så att planet $2x + 2y + z = a$ tangerar ytan $x + y^2 + z^4 = 1$.

Lösning: Detta är uppgift 2.86 i övningsboken. Låt $F(x,y) = x + y^2 + z^4$ så att ytan ges av $F = 1$. Vi har $\operatorname{grad} F = (1, 2y, 4z^3)$. Planet $2x + 2y + z = a$ har normalvektor $\mathbf{n} = (2,2,1)$. Antag att detta plan tangerar ytan $F = 1$ i en punkt (x,y,z). Eftersom gradienten $\operatorname{grad} F$ är normal till nivåytan $F = 1$ måste vi ha $\operatorname{grad} F(x,y,z) = \lambda\mathbf{n}$ för något $\lambda \in \mathbb{R}$, dvs $(1, 2y, 4z^3) = \lambda(2,2,1)$. Första komponenten av den här ekvationen ger $\lambda = 1/2$; de resterande två komponenterna ger då $y = 1/2$ och $z = 1/2$. Villkoret att punkten (x,y,z) ligger i ytan $F = 1$ innebär nu att

$$x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 \quad \text{dvs} \quad x = \frac{11}{16}.$$

Slutligen ger villkoret att punkten (x,y,z) också ligger i planet $2x + 2y + z = a$ att

$$2\left(\frac{7}{16}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = a \quad \text{dvs} \quad a = \frac{23}{8}.$$

Svar: $a = \frac{23}{8}$.

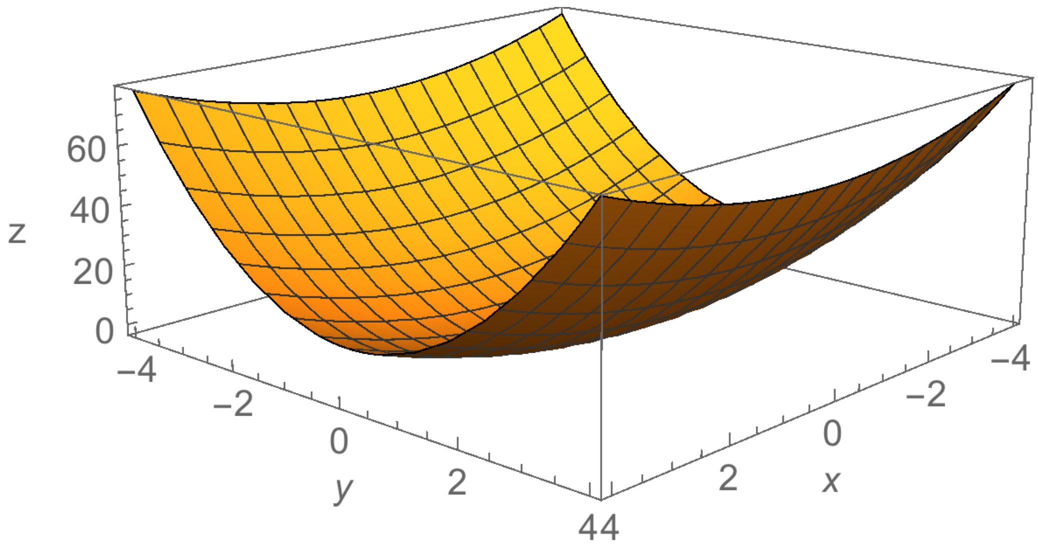
Version B

1. (4 poäng) Betrakta ytan i $\mathbb{R}^3$ som beskrivs av ekvationen

$$x^2 + 4y^2 - z - 2 = 0.$$

(a) Gör en enkel skiss av ytan. Ange vilken av de tre axlarna i din figur som är x-axel, vilken som är y-axel och vilken som är z-axel.

Lösning:



(b) Skärningen av ytan med planet $x = y$ är en kurva i $\mathbb{R}^3$. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan i punkten $\mathbf{x}_0 = (1, 1, 3)$.

Lösning: Skärningen med planet $x = y$ är kurvan som bestäms av

$$x^2 + 4y^2 - z - 2 = 0 \quad \text{och} \quad x = y.$$

Låter vi $t := x = y$ ser vi att

$$\mathbf{r}(t) = (t, t, 5t^2 - 2), \qquad t \in \mathbb{R},$$

är en parametrisering av kurvan. Vi har $\mathbf{r}(1) = \mathbf{x}_0$. Eftersom $\mathbf{r}'(t) = (1, 1, 10t)$, finner vi att $\mathbf{r}'(1) = (1, 1, 10)$ är en tangentvektor till kurvan i punkten $\mathbf{x}_0$. Tangenten till kurvan i punkten $\mathbf{x}_0$ har således ekvationen

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + s\mathbf{r}'(1),$$

dvs

$$(x, y, z) = (1, 1, 3) + s(1, 1, 10), \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Svar: $(x, y, z) = (1, 1, 3) + s(1, 1, 10)$ där $s \in \mathbb{R}$.

2. (4 poäng) Bestäm alla stationära punkter till polynomet

$$f(x,y) = (y^2-1)^2 + (x-y^2+1)^2.$$

Avgör för varje stationär punkt om det är en lokal max punkt, en lokal min punkt eller en sadelpunkt.

Lösning: Samma som för version A.

3. (4 poäng) Bestäm konstanten $a \in \mathbb{R}$ så att planet $2x+y+z=a$ tangerar ytan $x+y^2+z^4=1$.

Lösning: Låt $F(x,y) = x+y^2+z^4$ så att ytan ges av $F=1$. Vi har $\operatorname{grad} F = (1, 2y, 4z^3)$. Planet $2x+y+z=a$ har normalvektor $\mathbf{n} = (2,1,1)$. Antag att detta plan tangerar ytan $F=1$ i en punkt (x,y,z). Eftersom gradienten $\operatorname{grad} F$ är normal till nivåytan $F=1$ måste vi ha $\operatorname{grad} F(x,y,z) = \lambda\mathbf{n}$ för något $\lambda \in \mathbb{R}$, dvs $(1,2y,4z^3) = \lambda(2,1,1)$. Första komponenten av den här ekvationen ger $\lambda = 1/2$; de resterande två komponenterna ger då $y = 1/4$ och $z = 1/2$. Villkoret att punkten (x,y,z) ligger i ytan $F=1$ innebär nu att

$$x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 \quad \text{dvs} \quad x = 1 - \frac{2}{16} = \frac{7}{8}.$$

Slutligen ger villkoret att punkten (x,y,z) också ligger i planet $2x+y+z=a$ att

$$2\left(\frac{7}{8}\right) + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = a \quad \text{dvs} \quad a = \frac{5}{2}.$$

Svar: $a = \frac{5}{2}$.