KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2016-01-12

DEL A

1. Betrakta funktionen $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + (1-x)^2 + y^2}$.
   (a) Beräkna gradienten till f i origo. **(1 p)**
   (b) Vilken information om utseendet på grafen till f i en omgivning till origo ges av riktningen respektive längden av gradienten till f i origo? **(2 p)**
   (c) Har funktionen f ett minimum över hela xy-planet? **(1 p)**

Lösningsförslag.

(a) Vi får de partiella derivatorna

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2(x-1)}{(1+(1-x)^2+y^2)^2} \quad \text{och} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2y}{(1+(1-x)^2+y^2)^2}$$

vilket ger gradienten

$$\mathbf{grad}\, f(x,y) = \left(-\frac{2(x-1)}{(1+(1-x)^2+y^2)^2}, -\frac{2y}{(1+(1-x)^2+y^2)^2}\right).$$

När vi sätter in $(x, y) = (0, 0)$ får vi

$$\mathbf{grad}\, f(0,0) = \left(-\frac{2(0-1)}{(1+(1-0)^2+0^2)^2}, -\frac{2\cdot 0}{(1+(1-0)^2+0^2)^2}\right) = \left(\frac{2}{4}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

(b) Eftersom funktionen är differentierbar ger gradientens riktning information om i vilken riktning grafen lutar brantast uppåt. I det här fallet är det i positiv x-led. Beloppet av gradienten ger den maximala riktningsderivatan, som i det här fallet är $1/2$. Det betyder att grafen till f har ett tangentplan som lutar med en maximal riktningskoefficient $1/2$ och detta är i positiv x-led.

(c) Funktionen är positiv över hela planet, men kan komma godtyckligt nära 0. Alltså finns inget minimum över hela planet.

Svar.

(a) $\mathbf{grad}\, f(0,0) = (1/2, 0)$.

(c) Funktionen har inget globalt minimum över hela xy-planet.

2. (a) Formulera Greens formel[1] inklusive alla förutsättningar. **(2 p)**

(b) Använd Greens formel för att beräkna kurvintegralen

$$\int_T (x - 2x^2 y)\,dx + (2xy^2 - y)\,dy$$

där T är randen till parallelltrapetsen med hörn i punkterna $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,4)$ och $(0,5)$ genomlöpt moturs. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Om $\mathbf{F} = (P, Q)$ är ett kontinuerligt deriverbart vektorfält i planet och D är ett begränsat område med en styckvis kontinuerligt deriverbar rand C så gäller

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

där C är positivt orienterad med avseende på D.

(b) Enligt Greens formel kan kurvintegralen beräknas med hjälp av dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{\partial}{\partial x}(2xy^2 - y) - \frac{\partial}{\partial y}(x - 2x^2 y)\,dxdy = \iint_D 2y^2 + 2x^2\,dxdy$$

där D är den givna parallelltrapetsen. Vi kan beskriva D med olikheterna $0 \le x \le 2$ och $0 \le y \le 5 - x/2$, vilket gör att vi kan beräkna dubbelintegralen med upprepad integration.

$$\begin{aligned}
\iint_D 2y^2 + 2x^2\,dxdy &= 2\int_0^2 \int_0^{5-x/2} x^2 + y^2\,dy\,dx = 2\int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^{5-x/2} dx \\
&= 2\int_0^2 (5 - x/2)x^2 + \frac{(5-x/2)^3}{3}\,dx = 2\left[\frac{5x^3}{3} - \frac{x^4}{8} - \frac{(5-x/2)^4}{6} \right]_0^2 \\
&= 2\left(\frac{40}{3} - 2 - \frac{4^4}{6} + \frac{5^4}{6} \right) = \frac{80 - 12 - 256 + 625}{3} = \frac{437}{3}.
\end{aligned}$$

Svar.

(b) Kurvintegralens värde är $437/3$.

[1] Green's Theorem in the plane.

3. Den plana kurva C som ges av ekvationen $27y^2 = x(x-9)^2$ kan parametriseras genom $\mathbf{r}(t) = (3t^2, 3t - t^3)$ där t genomlöper hela den reella tallinjen.
   (a) Kontrollera att parameterkurvan är en del av kurvan C, det vill säga att punkterna på den uppfyller ekvationen för C. **(1 p)**
   (b) Beräkna hastigheten $\mathbf{r}'(t)$ för den parametriserade kurvan. **(1 p)**
   (c) Ställ upp den integral i parametern t som beräknar längden av den ögla som ges av intervallet $-\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3}$. Förenkla integranden så långt som möjligt. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Vi sätter in $\mathbf{r}(t)$ i ekvationen och får vänsterledet

$$27(3t - t^3)^2 = 27(9t^2 - 6t^4 + t^6)$$

och högerledet

$$3t^2(3t^2-9)^2 = 3t^2(9t^4 - 54t^2 + 81) = 27(t^6 - 6t^4 + 9t^2).$$

Eftersom höger- och vänsterled är lika uppfyller parametriseringen ekvationen och parameterkurvan är en del av C.

(b) Hastigheten av parametriseringen ges av derivatan med avseende på t. Vi får

$$\mathbf{r}'(t) = (6t, 3 - 3t^2).$$

(c) För att beräkna längden av kurvan integrerar vi beloppet av $\mathbf{r}'(t)$. Vi får beloppet som

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}'(t)| &= 3\sqrt{(2t)^2 + (1-t^2)^2} = 3\sqrt{4t^2 + 1 - 2t^2 + t^4} = 3\sqrt{1 + 2t^2 + t^4} \\ &= 3\sqrt{(1+t^2)^2} = 3(1+t^2). \end{aligned}$$

Längden av öglan blir

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 3(1+t^2)\,dt &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 3(1+t^2)\,dt = \left[3t + t^3\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \\ &= 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - (-3\sqrt{3}) - (-3\sqrt{3}) = 12\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Svar.

(b) $\mathbf{r}'(t) = (6t, 3 - 3t^2)$.
(c) Öglans längd är $12\sqrt{3}$ längdenheter.

Del B

4. Beräkna dubbelintegralen
$$\iint_D xy\,dx\,dy$$
där D är området som i polära koordinater ges av olikheterna
$$\begin{cases} 0 \le r \le \sin 2\theta, \\ 0 \le \theta \le \pi/2. \end{cases}$$

(4 p)

Lösningsförslag. När vi byter till polära koordinater får vi $dxdy = r\,drd\theta$. Integranden blir $xy = r^2 \cos\theta \sin\theta$ och gränserna ges av de givna olikheterna. Vi kan nu beräkna integralen med upprepad integration med början i r-led,

$$\iint_D xy\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin 2\theta} r^3 \sin\theta\cos\theta\,drd\theta = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4}\sin\theta\cos\theta\right]_{r=0}^{r=\sin 2\theta} d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin 2\theta)^4}{4}\frac{\sin 2\theta}{2}\,d\theta = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} (\sin 2\theta)^5\,d\theta = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 2\theta)^2 \sin 2\theta\,d\theta.$$

Vi kan göra variabelbytet $t = \cos 2\theta$ och får $dt = -2\sin 2\theta\,d\theta$, vilket ger

$$\frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 2\theta)^2 \sin 2\theta\,d\theta = -\frac{1}{16}\int_1^{-1} (1-t^2)^2\,dt = \frac{1}{16}\int_{-1}^{1} 1 - 2t^2 + t^4\,dt$$
$$= \frac{1}{16}\left[t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{16}\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{16}\left(\frac{15-10+3}{15}\right) = \frac{1}{15}.$$

Svar. $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy = \frac{1}{15}$

5. (a) Låt $f(x, y)$ vara en funktion av två variabler. Förklara vad som menas med att en punkt (x_0, y_0) är en stationär punkt, en lokal maxpunkt, respektive en lokal minpunkt. **(2 p)**

(b) Funktionen $f(x, y) = e^{x-x^3/3-y^2}$ har stationära punkter i $(1, 0)$ och $(-1, 0)$. Avgör om dessa är lokala maxpunkter, lokala minpunkter, eller ingetdera. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a)
- En *stationär punkt* är en punkt där gradienten är noll.
- En *lokal maxpunkt* är en punkt där funktionen antar ett värde som är maximalt i någon cirkelskiva med centrum i punkten.
- En *lokal minpunkt* är en punkt där funktionen antar ett värde som är minimalt i någon cirkelskiva med centrum i punkten.

(b) För att avgöra om de är lokala max- eller minpunkter ser vi på andraderivatorna. Eftersom exponentialfunktionen är monotont växande kan vi lika gärna betrakta funktionen $g(x, y) = x - x^3/3 - y^2$. Den kvadratiska formen i Taylorpolynomet av grad två för g ges av matrisen

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

I punkten $(1, 0)$ får vi matrisen

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

som är negativt definit, vilket visar att funktionen g har ett lokalt maximum i $(1, 0)$.
För punkten $(-1, 0)$ får vi matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

som är indefinit och punkten $(-1, 0)$ är en sadelpunkt för g och därmed varken lokal maxpunkt eller lokal minpunkt.

Vi kan också arbeta direkt på funktionen f och får

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (1 - x^2)e^{x-x^3/3-y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{x-x^3/3-y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (-2x + (1 - x^2)^2)e^{x-x^3/3-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2y(1 - x^2)e^{x-x^3/3-y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (-2 + (-2y)^2)e^{x-x^3/3-y^2}$$

och när vi sätter in $(1, 0)$ och $(-1, 0)$ får vi

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} e^{2/3}, \text{respektive} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} e^{-2/3}$$

och samma analys som tidigare leder till samma slutsats.

Svar.

(b) $(1,0)$ är en lokal maxpunkt och $(-1,0)$ är varken en lokal maxpunkt eller en lokal minpunkt.

6. Kurvan C är en sammanhängande del av hyperbeln $xy = 1$ från punkten $(1, 1)$ till punkten P. Bestäm P då
$$\int_C (2x + y)\,dx + (x - 8y)\,dy = 3.$$
(4 p)

Lösningsförslag. Låt den sökta punkten vara $(a, 1/a)$. Vi kan parametrisera kurvan som $\mathbf{r}(t) = (t, 1/t)$ och får $d\mathbf{r} = (1, -1/t^2)\,dt$. Därmed ges integralen av

$$\int_C (2x + y)\,dx + (x - 8y)\,dy = \int_1^a (2t + \frac{1}{t})\,dt + (t - \frac{8}{t})(-1/t^2)\,dt$$
$$= \int_1^a 2t + 8t^{-3}\,dt = \left[t^2 - 4t^{-2}\right]_1^a = a^2 - 4a^{-2} - 1 + 4 = 3 + a^2 - 4a^{-2}.$$

Villkoret leder till ekvationen
$$a^2 - 4a^{-2} = 0$$
som kan skrivas om som $a^4 - 4 = 0$ i och med att a inte kan vara noll. Denna ekvation har fyra lösningar $a = \pm\sqrt{2}$ och $a = \pm i\sqrt{2}$. Vi söker en positiv reell lösning och får därmed $a = \sqrt{2}$. Det betyder att den sökta punkten är $P = (\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

Ett alternativt sätt att lösa uppgiften är att se att fältet $\mathbf{F}(x, y) = (2x + y, x - 8y)$ är konservativt och att vi kan hitta en potential genom att först integrera i x-led och får $\Phi(x, y) = x^2 + xy + g(y)$. Derivering med avseende på y ger då $x + g'(y) = x - 8y$, och vi kan välja $g(y) = -4y^2$. Integralens värde kan nu beräknas som skillnaden i potential, dvs
$$\int_C (2x + y)\,dx + (x - 8y)\,dy = \Phi(P) - \Phi(1, 1).$$
Eftersom $\Phi(1, 1) = 1^2 + 1 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = -2$ söker vi $P = (a, 1/a)$ med $\Phi(a, 1/a) = 1$. Detta villkor ger nu samma ekvation som tidigare för a.

Svar. Punkten är $P = (\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

DEL C

7. Betrakta ekvationen $F(x,y)=0$ där $F(x,y)=xe^y+ye^x$.
   (a) Visa att det finns en funktion g med $g(0)=0$ sådan att $F(x,g(x))=0$ för x nära 0. **(1 p)**
   (b) Beräkna Taylorpolynomet av grad två för g vid $x=0$. **(3 p)**

Lösningsförslag.

(a) Vi kan använda implicita funktionssatsen för att visa detta. Villkoren för denna är uppfyllda eftersom de ingående funktionerna är kontinuerligt deriverbara. Vi behöver kontrollera att derivatan av F med avseende på y är nollskild för att vi ska kunna lösa ut y som en funktion av x.
$$\frac{\partial F}{\partial y}=xe^y+e^x$$
och därmed är
$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)=0\cdot e^0+e^0=0+1=1\neq 0.$$
Implicita funktionssatsen ger nu att vi kan lösa ut y som en funktion $y=g(x)$ i närheten av origo.

(b) För att beräkna Taylorpolynomet av grad två kan vi derivera identiteten $F(x,g(x))=0$ med avseende på x. Vi får
$$0=\frac{d}{dx}\left(xe^{g(x)}+g(x)e^x\right)=e^{g(x)}+xe^{g(x)}g'(x)+g'(x)e^x+g(x)e^x$$
och när vi sätter in $x=0$ får vi
$$0=1+g'(0)+0$$
vilket ger $g'(0)=-1$. För att få andraderivatan deriverar vi en gång till och får
$$\begin{aligned}0=\frac{d}{dx}&\left(e^{g(x)}+xe^{g(x)}g'(x)+g'(x)e^x+g(x)e^x\right)\\&=e^{g(x)}g'(x)+e^{g(x)}g'(x)+xe^{g(x)}(g'(x))^2+xe^{g(x)}g''(x)\\&\qquad+g''(x)e^x+g'(x)e^x+g'(x)e^x+g(x)e^x.\end{aligned}$$
När vi sätter in $x=0$ får vi
$$0=g'(0)+g'(0)+0+0+g''(0)+g'(0)+g'(0)+0$$
vilket ger $g''(0)=-4g'(0)=4$. Taylorpolynomet av grad två blir därmed
$$p(x)=0-x+4x^2/2=-x+2x^2.$$

Svar.

(b) Taylorpolynomet av grad två vid $x=0$ är $p(x)=-x+2x^2$.

8. Funktionen f ges av
$$f(t) = \iint_D \exp\left(\frac{tx}{y^2}\right)\, dxdy$$
där $t > 0$ och området D definieras av att $t \leq x \leq 2t$ och $t \leq y \leq 2t$. Visa att
$$f(t) = Ct^2$$
för någon konstant C. **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi genomför variabelbytet $u = x/t$, $v = y/t$ och får Jacobimatrisen
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} 1/t & 0 \\ 0 & 1/t \end{bmatrix}$$
och därmed $dudv = 1/t^2 dxdy$. Alltså har vi
$$f(t) = \int_1^2 \int_1^2 \exp\left(\frac{t^2 u}{t^2 v^2}\right) t^2 dudv = t^2 \int_1^2 \int_1^2 \exp\left(\frac{u}{v^2}\right)\, dudv.$$
Vi har därmed visat att $f(t) = Ct^2$ där konstanten C ges av
$$C = \int_1^2 \int_1^2 \exp\left(\frac{u}{v^2}\right)\, dudv.$$

9. Låt $g(r)$ vara en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion med $g'(4) = 1$. Beräkna integralen
$$\iint_D \left(f''_{xx} + f''_{yy}\right)\, dxdy,$$
där $f(x,y) = g\left(x^2+y^2\right)$ och D är en cirkelskiva med radie 2 kring origo. **(4 p)**

Lösningsförslag. Eftersom förutsättningarna för divergenssatsen i planet är uppfyllda kan vi skriva om dubbelintegralen som en flödesintegral
$$\iint_D \left(f''_{xx} + f''_{yy}\right)\, dxdy = \int_C \mathbf{grad}\, f \cdot d\mathbf{N}.$$
Vi får gradienten av f som
$$\mathbf{grad}\, f = \left(2xg'\left(x^2+y^2\right), 2yg'\left(x^2+y^2\right)\right).$$
En normerad normalvektor till cirkeln C ges av $\mathbf{N}(x,y) = \frac{1}{2}(x,y)$ och därmed blir linjeintegralen
$$\int_C \mathbf{grad}\, f \cdot d\mathbf{N} = \int_C g'(4)(2x,2y)\cdot(1/2x,1/2y)\, ds = \int_C (x^2+y^2)\, ds = 4\int_C ds = 4\cdot 4\pi = 16\pi.$$
Ett annat sätt att lösa uppgiften är att beräkna integranden $f''_{xx} + f''_{yy}$ som
$$f''_{xx} + f''_{yy} = 4g'\left(x^2+y^2\right) + 4(x^2+y^2)g''\left(x^2+y^2\right).$$
Överång till polära koordinater ger
$$\iint_D \left(f''_{xx} + f''_{yy}\right)\, dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^2 4g'(r^2) + 4r^2g''(r^2)\, rdrd\theta = 2\pi\int_0^2 4g'(r^2) + 4r^2g''(r^2)\, rdr.$$
Variabelbytet $t = r^2$ ger sedan $dt = 2r\, dr$ och
$$2\pi\int_0^2 4g'(r^2) + 4r^2g''(r^2)\, rdr = 4\pi\int_0^4 g'(t) + tg''(t)\, dt = 4\pi\left[tg'(t)\right]_0^4 = 4\pi\cdot 4 - 4\pi\cdot 0 = 16\pi.$$

Svar. $\iint_D \left(f''_{xx} + f''_{yy}\right)\, dxdy = 16\pi.$
