



WRITTEN EXAM FOR HF1013, DISCRETE MATHEMATICS:TEN1, 5 CREDITS, JANUARY 2016

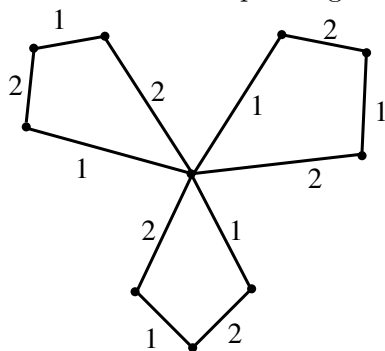
*Allowed aids:* A sheet of hand-written notes, notes on **one** side only. (No computer print-outs!) And one pocket calculator. Part A may be skipped by those who passed the mid-term exams with full points.

**PART A.** Tick the correct boxes: Below are 4 propositions, each is either **true** or **false**. If you tick the correct box, you will get +1 point. If you tick the wrong box, you will get -1 point. You can also **pass** on a question, that gives 0 points. (You cannot get a negative subtotal on part A.)

- For all nonempty sets  $A, B, C$  we always have  $A \subseteq B \subseteq C \wedge C \times B \subseteq B \times A \Rightarrow A = B = C$ .  
För alla icke-tomma mängder  $A, B, C$  har vi alltid  $A \subseteq B \subseteq C \wedge C \times B \subseteq B \times A \Rightarrow A = B = C$ .  
true false pass
- For all prime numbers,  $p, q$ , the following is true:  $p|q \Rightarrow p = q$ .  
För alla primtal,  $p, q$ , så är följande sant:  $p|q \Rightarrow p = q$ .  
true false pass
- For all integers,  $a, b, c$ , the following is true:  $ab|c \wedge bc|a \wedge ac|b \Rightarrow a = b = c$ .  
För alla heltal,  $a, b, c$ , så är följande sant:  $ab|c \wedge bc|a \wedge ac|b \Rightarrow a = b = c$ .  
true false pass
- There are graphs with in total 5 vertices. Further, each vertex is connected (with one edge) to an odd number of other vertices but not to an even number of other vertices.  
Det finns grafer med totalt 5 hörn. Vidare är varje hörn är förbundet (med en kant) till ett udda antal andra hörn men inte till ett jämnt antal andra hörn.  
true false pass

**PART B.** Give complete and correct solutions, write legibly. Motivate each logic step fully. No points for answers only. Each problem is worth 3 points. (Some Swedish translations are given.)

5. Find **all** minimal spanning trees of the following graph:



Give a motivation of why you have found all minimal spanning trees of this graph.

Hitta **alla** minimala uppspännade träd till ovanstående graf, motivera också varför det inte finns andra minimala uppspännande träd än de som du angett.

- Solve the recurrence relation  $a_{n+2} = 11a_{n+1} - 28a_n$  if  $a_0 = 0$  and  $a_1 = 3$ . (Lös differensekvationen.)
- The *degree sequence* of a graph, is the sequence of nonnegative integers that lists the degrees of each vertex in a given graph. The degree sequence of the graph above would be 2,2,2,2,2,2,2,2,6 because it has 9 vertices of degree 2 and 1 vertex of degree 6. Consider the two sequences 1,2,3,4,5 and 2,2,3,3,7,7. Do the following for each of these sequences: if there exists a graph with that sequence, draw it. If not explain why no graph can have that sequence as a degree sequence. Can there exist a tree with the degree sequence 2,2,3,3,7,7? Why? Why not?

7. *Gradtalsföljden* för en graf definieras som följderna av icke-negativa heltal som listar alla hörns gradtal för en given graf. Gradtalsföljden för grafen ovan (i uppgift 5) skulle då vara 2,2,2,2,2,2,2,2,2,6 eftersom den har 9 hörn av grad 2 och ett hörn av grad 6. För de två följderna 1,2,3,4,5 och 2,2,3,3,7,7 gör följande: om det finns en graf med den givna gradtalsföljden, rita den grafen förklara annars varför det inte finns en graf med den givna gradtalsföljden. Kan det finnas ett träd med gradtalssekvensen 2,2,3,3,7,7? Varför? Varför inte?

8. The following proof contains an error. Find the error (1p) and correct it (2p).

**Statement:** All positive integers  $> 1$  are divisible by a prime number.

**Proof:** Let  $n$  be an arbitrary positive integer. If  $n$  is a prime number then  $n$  is divisible by a prime number, namely itself. Otherwise  $n$  is a composite number, that is we can write  $n = a \cdot b$  where  $a, b$  are positive integers  $> 1$ . Choose the smallest of  $a, b$ , we can assume that  $a$  is the smallest one, this must be a prime number so since  $n$  is divisible by both  $a$  and  $b$  and  $a$  is a prime number, we have shown that  $n$  is divisible by a prime number ( $a$ ) and as  $n$  was any positive integer the proof is complete.

**Bevis:** Låt  $n$  vara ett godtyckligt positivt heltal. Om  $n$  är ett primtal så är  $n$  delbart med ett primtal, nämligen sig självt. Annars är  $n$  ett sammansatt tal, dvs vi kan skriva  $n = a \cdot b$  där  $a, b$  är positiva heltal  $> 1$ . Välj det minsta av dessa tal, vi kan anta att det är  $a$ , då måste detta tal vara ett primtal, vi har alltså visat att  $n$  är delbart med ett primtal ( $a$ ) och eftersom  $n$  var godtyckligt valt positivt heltal så är beviset klart.

9. The following statement and proof is incomplete. Fill in the missing details at every place where it reads "...". (Där det står "...". i texten, fyll i så att det blir ett fullständigt bevis.)

**Statement:** For all integers  $n \geq 5$  we have  $2^n \geq n^2$ . (För alla heltal  $n \geq 5$  gäller  $2^n \geq n^2$ .)

**Proof:** Induction over  $n$ . Introduce the name  $A(n)$  for the statement  $2^n \geq n^2$ . We shall prove, by mathematical induction that  $\forall n \geq 5 : A(n)$ .

1. ...

2. Assume that the  $A(p)$  holds for a particular  $p \geq 5$ . Now show ...

3. ...

10. Assume that  $A, B, C$  are three sets with no elements in all three sets (inga element ligger i alla tre mängderna). Assume further that the number of elements that lie in precisely two of the sets are 6 (antal element som ligger i precis två av mängderna är totalt 6). The set  $A \Delta B \Delta C$  is defined as the set of elements which lie in precisely 1 or 3 of the sets  $A, B, C$ . Prove that  $|A \cup B \cup C| = |A \Delta B \Delta C| + 6$ .

11. Prove the formula  $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$  for all integers  $n > 0$  (positiva heltal  $n > 0$ ). We accept a proof based on manipulations of formulas and do not demand a proof by mathematical induction here. (Vi accepterar ett bevis med formelmanipulation och kräver inte ett induktionsbevis här.)

*Hint: Write out the first few terms in the sum  $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$  and factor out (bryt ut)  $n$ . Then use the formula  $\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} = 2^m$  that is valid for all nonnegative integers  $m$ , particularly  $m = n - 1$ .*

12. The *Fibonacci Numbers* are recursively defined as  $f_0 = 1, f_1 = 1$  and  $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ , for all  $n \geq 0$ .

Set  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  and consider the powers  $M, M^2, M^3, \dots$  of this matrix. Prove that

$$M^n = \begin{pmatrix} f_n & f_{n-1} \\ f_{n-1} & f_{n-2} \end{pmatrix} \text{ for all } n \geq 2.$$

Powers of a matrix "potenser av en matris" are the products

$$M^0 = I, \quad M^1 = M, \quad M^2 = M \cdot M, \quad M^3 = M \cdot M \cdot M, \quad \dots$$