1. För alla icke-tomma mängder A, B, C har vi alltid $A \subseteq B \subseteq C \wedge C \times B \subseteq B \times A \Rightarrow A = B = C$.
Lösning: Detta är **sant** eftersom vi kan dra slutsatsen $C \subseteq B \subseteq A$ också, så här: välj ett $c \in C$ och $b \in B$ godtyckligt. Då gäller

$$(c, b) \in C \times B \subseteq B \times A \Rightarrow (c, b) = (b', a') \in B \times A,$$

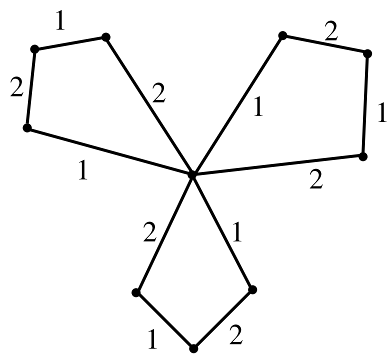
det vill säga $c = b' \in B$ och $b = a' \in A$ så att vi alltså har visat implikationerna $x \in C \Rightarrow x \in B$ och $x \in B \Rightarrow x \in A$. Men det betyder precis $C \subseteq B \subseteq A$ och eftersom vi tidigare hade $A \subseteq B \subseteq C$ måste vi ha $A = B = C$.

2. För alla primtal, p, q, så är följande sant: $p|q \Rightarrow p = q$.
Lösning: Detta är **sant** eftersom om vi arbetar med primtal och har $p|q$ så finns alltså ett heltal k så att $q = p \cdot k$. Men just egenskapen att q är ett primtal ger oss då att $k = 1$, det vill säga $p = q$.

3. För alla heltal, a, b, c, så är följande sant: $ab|c \wedge bc|a \wedge ac|b \Rightarrow a = b = c$.
Lösning: **Falskt** eftersom om vi väljer $a = b = 1$ och $c = -1$ så gäller $ab|c \wedge bc|a \wedge ac|b$ men inte $a = b = c$.

4. Det finns grafer med totalt 5 hörn som har egenskapen att varje hörn är förbundet (med en kant) till ett udda antal andra hörn men inte till ett jämnt antal andra hörn.
Lösning: **Falskt** eftersom i varje graf måste antalet udda hörn vara jämnt, här påstås att antalet udda hörn i en graf kan vara 5 som är ett udda tal. Går inte.

5. Hitta **alla** minimala uppspännade träd till nedanstående graf, motivera också varför det inte finns andra minimala uppspännande träd än de som du angett.



Lösning: Benämn det centrala hörnet C. Det har grad 6. Vi ska basera våra resonemang på det hörnet. Vi inför också ordet ”öra” för de delgrafer som består av hörnen och kanterna som sticker ut från C och bildar en cykel, det är tre stycken öron i den här grafen.

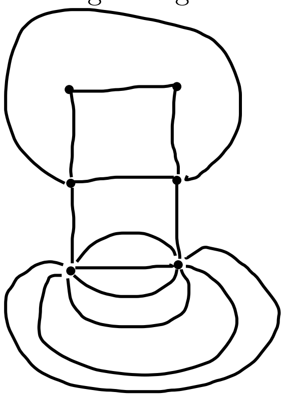
I varje uppspännande träd måste alla hörn ingå specifikt måste C ingå. Vidare för att trädet ska vara sammanhängande måste tre av kanterna som utgår från C som bildar ett öra också ingå, det räcker inte att ta med 2 av dessa kanter eftersom den resulterande grafen då inte blir sammanhängande. Omvänt kan vi inte ta med alla fyra kanterna eftersom vi då skapar en loop. Vi väljer alltså ett uppspännande delträd för varje öra genom att välja ut en kant av de fyra kanterna i örat som inte ska vara med. Eftersom uppspännande träd uppstår då vi väljer bort vilken kant som helst, i varje öra, kan vi, för att åstadkomma ett minsta uppspännande träd välja bort kanten med vikt 2. En sådan kant ska väljas bort i varje öra och det kan göras på två sätt för varje öra, enligt multiplikationsprincipen blir alltså totala antalet minsta uppspännade träd $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ stycken som väljs genom att från varje öra ta bort precis en av kanterna av vikt 2.

6. Solve the recurrence relation $a_{n+2} = 11a_{n+1} - 28a_n$ if $a_0 = 0$ and $a_1 = 3$. (Lös differensekvationen.)

Lösning: Den karakteristiska ekvationen är $\lambda^2 = 11\lambda - 28 \Leftrightarrow \lambda^2 - 11\lambda + 28 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5.5 \pm \sqrt{30.25 - 28} \Leftrightarrow \lambda = 5.5 \pm 1.5$ så vi har alltså de två olika rötterna $\lambda = 4$ och $\lambda = 7$. Alltså är lösningen på formen $a_n = A \cdot 4^n + B \cdot 7^n$ och med $a_0 = 0$ och $a_1 = 3$ ger detta ekvationssystemet $A + B = 0 \wedge 4A + 7B = 3 \Leftrightarrow A = -B \wedge 3B = 3 \Leftrightarrow A = -1 \wedge B = 1$ så att $a_n = 7^n - 4^n$.

7. The *degree sequence* of a graph, is the sequence of nonnegative integers that lists the degrees of each vertex in a given graph. The degree sequence of the graph above would be 2,2,2,2,2,2,2,2,2,6 because it has 9 vertices of degree 2 and 1 vertex of degree 6. Consider the two sequences 1,2,3,4,5 and 2,2,4,4,7,7. Do the following for each of these sequences: if there exists a graph with that sequence, draw it. If not explain why no graph can have that sequence as a degree sequence. Can there exist a tree with the degree sequence 2,2,4,4,7,7? Why? Why not?

Lösning: Gradtalssekvensen 1,2,3,4,5 är omöjlig eftersom den i så fall skulle ange en graf med udda antal udda hörn (de med gradtal 1,3,5). En graf måste ju alltid ha ett jämnt antal udda hörn.
Nedan ges en graf med gradtalssekvensen 2,2,4,4,7,7:



Om ett träd hade gradtalssekvensen 2,2,4,4,7,7 så skulle summan av gradtalen vara 2+2+4+4+7+7 = 26. Men eftersom antalet kanter alltid är lika med 2 gånger denna summa så skulle detta "träd" ha 13 kanter, vilket omöjligt eftersom det bara finns 6 noder. Ett träd med 6 noder måste ju ha precis 5 kanter.

8. The following proof contains an error. Find the error (1p) and correct it (2p).

Bevis: Låt n vara ett godtyckligt positivt heltal > 1. Om n är ett primtal så är n delbart med ett primtal, nämligen sig självt. Annars är n ett sammansatt tal, dvs vi kan skriva $n = a \cdot b$ där a, b är positiva heltal > 1. Välj det minsta av dessa tal, vi kan anta att det är a, då måste detta tal vara ett primtal, vi har alltså visat att n är delbart med ett primtal (a) och eftersom n var godtyckligt valt positivt heltal så är beviset klart.

Lösning: Felet i beviset är att det finns ingenting som säger att a är ett primtal. Rättelsen lyder så här: antag att det minsta av alla positiva delare > 1 inte är ett primtal. Kalla detta minsta tal a. Eftersom a inte är ett primtal så finns p, q båda > 1 så att $a = pq$. Men då följer att $p|a|ab = n$, dvs $p|n$ och vi har hittat ett tal $p > 1$ som delar n som är strängt mindre än det minsta (som är a) av talen > 1 som delar n. Detta är en motsägelse och vi har alltså visat att a måste vara ett primtal.

9. The following statement and proof is incomplete. Fill in the missing details at every place where it reads "..." in the text. (Där det står "..." i texten, fyll i så att det blir ett fullständigt bevis.)

Statement: For all integers $n \geq 5$ we have $2^n \geq n^2$. (För alla heltal $n \geq 5$ gäller $2^n \geq n^2$.)
Proof: Induction over n. Introduce the name $A(n)$ for the statement $2^n \geq n^2$. We shall prove, by mathematical induction that $\forall n \geq 5 : A(n)$.
1. ...
2. Assume that the $A(p)$ holds for a particular $p \geq 5$. Now show ...
3. ...

Lösning:
1. Check that $A(5)$ is true, that is check that $2^5 \geq 5^2$ holds. But this is equivalent to $32 \geq 25$ which is certainly true. Hence $A(5)$ holds.
2. Assume that $A(p)$ holds for a particular $p \geq 5$. Now show that $A(p+1)$ also holds, that is with the support of $A(p) \Leftrightarrow 2^p \geq p^2$ show that $2^{p+1} \geq (p+1)^2$. We show this by expanding and estimating

$$(p+1)^2 = p^2 + 2p + 1 \leq p^2 + 2p + p = p(p+3) \leq p(p+p) = 2p^2. \tag{1}$$

Here we have repeatedly used that $p \geq 5$. But by the induction assumption we have $p^2 \leq 2^p$, using this to further estimate the expression above upwards we get

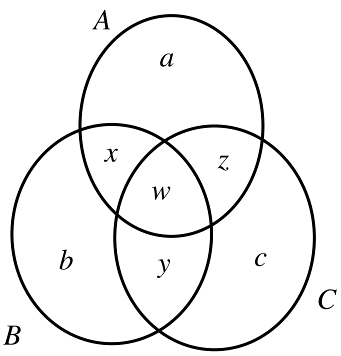
$$(p+1)^2 \leq \ldots \text{by } (1) \ldots \leq 2p^2 \leq 2 \cdot 2^p = 2^{p+1}$$

but this means precisely that $A(p+1)$ holds, that is we have shown that the implication $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ always is true whenever $p \geq 5$.

3. As $A(5)$ is true (by step 1), we get (by step 2) that $A(6)$ is true and so on. The implications continue indefinitely and by the principle of mathematical induction all integers $n \geq 5$ are reached, in conclusion $\forall n \geq 5 : A(n)$ holds which completes the proof.

10. Assume that A, B, C are three sets with no elements in all three sets (inga element ligger i alla tre mängderna). Assume further that the number of elements that lie in precisely two of the sets are 6 (antal element som ligger i precis två av mängderna är totalt 6). The set $A \triangle B \triangle C$ is defined as the set of elements which lie in precisely 1 or 3 of the sets A, B, C. Prove that $|A \cup B \cup C| = |A \triangle B \triangle C| + 6$.

Lösning: Ett Venn-diagram över situationen har följande utseende:



Här betecknar a det antal element som endast ligger i A, b det antal element som endast ligger i B och c det antal element som endast ligger i C. Vidare betecknar x det antal element som ligger i både A och B, men inte i C och y och z har motsvarande betydelser för B & C respektive C & A. Slutligen betecknar w då det antal element som ligger i alla tre mängderna.

Enligt definitionen av $|A \triangle B \triangle C|$ så gäller

$$|A \triangle B \triangle C| = a + b + c + w$$

och vidare, enligt förutsättningarna har vi $x + y + z = 6$. Men då får vi

$$|A \cup B \cup C| = a + b + c + x + y + z + w = a + b + c + 6 + w = |A \triangle B \triangle C| + 6$$

vilket var det som skulle visas. (Observera att vi aldrig behövde använda att de tre mängderna inte hade några gemensamma element.)

11. Prove the formula $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$ for all positive integers $n > 0$.

Solution: Indeed,

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = 1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + 3 \cdot \binom{n}{3} + \ldots + n \cdot \binom{n}{n} =$$

$$1 \cdot \frac{n!}{(n-1)!1!} + 2 \cdot \frac{n!}{(n-2)!2!} + 3 \cdot \frac{n!}{(n-3)!3!} + \ldots + n \cdot \frac{n!}{(n-n)!n!} =$$

$$n \cdot \left(1 \cdot \frac{(n-1)!}{(n-1)!1!} + 2 \cdot \frac{(n-1)!}{(n-2)!2!} + 3 \cdot \frac{(n-1)!}{(n-3)!3!} + \ldots + n \cdot \frac{(n-1)!}{(n-n)!n!}\right) = n \cdot \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{(n-1)!}{(n-k)!k!} =$$

$$n \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = n \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)! \cdot j!} = n \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = n \cdot 2^{n-1}.$$

12. The *Fibonacci Numbers* are recursively defined as $f_0 = 1, f_1 = 1$ and $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, for all $n \geq 0$. Set $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ and consider the powers $M, M^2, M^3, ...$ of this matrix. Prove that

$$M^n = \begin{pmatrix} f_n & f_{n-1} \\ f_{n-1} & f_{n-2} \end{pmatrix} \text{ for all } n \geq 2.$$

Solution: We construct a proof by induction over n so we introduce the predicate

$$A(n) \Leftrightarrow M^n = \begin{pmatrix} f_n & f_{n-1} \\ f_{n-1} & f_{n-2} \end{pmatrix}$$

and observe that what we need to prove can be written $\forall n \geq 2 : A(n)$.

Step 1. Show that $A(2)$ holds, that is show that

$$M^2 = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

But this clearly holds as

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Step 2. Now prove that the implication $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ is true for all $p \geq 2$. To prove the implication we must first assume that $A(p)$ holds that is

$$M^p = \begin{pmatrix} f_p & f_{p-1} \\ f_{p-1} & f_{p-2} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

With the help of this assumption we need to prove that $A(p+1)$ holds, that is

$$M^{p+1} = \begin{pmatrix} f_{p+1} & f_p \\ f_p & f_{p-1} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Now $M^{p+1} = M \cdot M^p$ and by the induction assumption we can replace M^p using the equality (2) so that

$$M^{p+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_p & f_{p-1} \\ f_{p-1} & f_{p-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot f_p + 1 \cdot f_{p-1} & 1 \cdot f_{p-1} + 1 \cdot f_{p-2} \\ 1 \cdot f_p + 0 \cdot f_{p-1} & 1 \cdot f_{p-1} + 0 \cdot f_{p-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_p + f_{p-1} & f_{p-1} + f_{p-2} \\ f_p & f_{p-1} \end{pmatrix}.$$

But according to the definition of the fibonacci numbers, $f_0, f_1, f_2, \ldots$, we have $f_{p+1} = f_p + f_{p-1}$ and $f_p = f_{p-1} + f_{p-2}$ so that we have shown that (3) holds, that is $A(p+1)$ holds and in summary we have shown the implication $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ for all $p \geq 2$.

Step 3. *We just reiterate the words of the similar solution above (to problem 9), but here we start with $A(2)$ instead of $A(5)$.*