



**SF1626 Flervariabelanalys
Tentamen
Måndagen den 21 mars 2016**

Skrivtid: 08:00-13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

| Betyg | A | B | C | D | E | Fx |
|------------------|----|----|----|----|----|----|
| Total poäng | 27 | 24 | 21 | 18 | 16 | 15 |
| varav från del C | 6 | 3 | - | - | - | - |

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Låt D vara fyrhörningen med hörn i punkterna $(0, 0)$, $(6, 0)$, $(0, 5)$ och $(4, 5)$.
- (a) Skissera fyrhörningen D och beräkna dess area. **(1 p)**
- (b) Bestäm fyrhörningens masscentrum. **(3 p)**

2. Vektorfältet \mathbf{F} i planet ges av $\mathbf{F}(x, y) = (y^2, 2xy + 1)$.
- (a) Avgör om \mathbf{F} är konservativt. **(1 p)**
- (b) Beräkna kurvintegralen $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där C är kurvan som parametriseras av

$$\mathbf{r}(t) = (te^t, e^{t-1}), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

(3 p)

3. Den plana kurvan C parametriseras av

$$\mathbf{r}(t) = (\sin t, \sin t + \sqrt{2} \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- (a) Bestäm den högsta farten för en partikel som rör sig enligt denna parametrisering. **(2 p)**
- (b) Kurvan C är sluten och begränsar ett område i planet. Arean av detta område ges med Greens formel av kurvintegralen

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C y \, dx$$

där $\mathbf{F}(x, y) = (y, 0)$. Beräkna denna area. **(2 p)**

DEL B

4. Låt $f(x, y) = 2x - 20y + x^2 - xy^2 + 2y^3$.

(a) Beräkna Taylorpolynomet av grad två till funktionen f kring punkten $(1, 2)$.

(2 p)

(b) Använd Taylorpolynomet för att avgöra om $f(x, y)$ har ett lokalt maximum, lokalt minimum eller ingetdera i punkten $(1, 2)$.

(2 p)

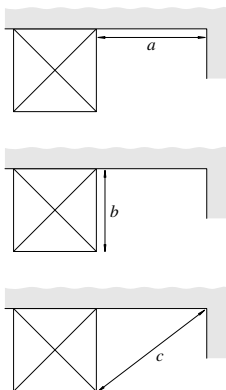
5. Låt D vara kvartscylindern som ges av olikheterna

$$y^2 + z^2 \leq 9, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad y \geq 0 \quad \text{och} \quad z \geq 0.$$

Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2y, -y^2, yz^2)$ ut genom randen till D .

(4 p)

6. Osquar ska inreda en myshörna i sin lägenhet och vill därför mäta avståndet a mellan ett skåp och motstående vägg. Eftersom det ligger en massa bråte i vägen är det svårt att mäta avståndet a direkt, så han mäter istället avstånden b och c , enligt figuren



och får

$$b = 12 \pm 0,01 \text{ dm},$$

$$c = 20 \pm 0,01 \text{ dm}.$$

Sedan använder han Pythagoras sats för att bestämma ett uttryck för a i b och c . Använd linjarisering (linjär approximation) av detta uttryck för att bestämma a med felmarginal.

(4 p)

Var god vänd!

DEL C

7. I denna uppgift antar vi att alla funktioner och vektorfält är kontinuerligt deriverbara.

(a) Visa att ett konservativt vektorfält $\mathbf{F}(x, y, z)$ i tre dimensioner är *rotationsfritt*, det vill säga uppfyller $\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. **(2 p)**

(b) Vi säger att ett vektorfält $\mathbf{F}(x, y, z)$ i tre dimensioner har en *integrerande faktor* $f(x, y, z)$ om $f(x, y, z) \neq 0$ är en funktion sådan att vektorfältet $f\mathbf{F}$ är konservativt. Visa att om \mathbf{F} har en integrerande faktor så är $\text{rot } \mathbf{F}$ ortogonalt mot \mathbf{F} överallt. **(2 p)**

8. Inom datalogin studeras bland annat hur slumpträd uppdateras vid slumpmässigt borttagande av element. Då behöver trippelintegralen

$$\iiint_{0 \leq x \leq y \leq z \leq 1} ((y-x)^k - (z-y)^k) dx dy dz$$

beräknas där k är ett positivt heltal. Beräkna denna trippelintegral för alla $k > 0$.

(*Ledning:* Beräkningarna kan bli olika komplicerade beroende på i vilken ordning integrationerna utförs.) **(4 p)**

9. Bestäm den högst belägna punkt på paraboloiden $z = x^2 + 4y^2$ som är belyst av en punktljuskälla i $(8, 3, 0)$. **(4 p)**