SF1625 Envariabelanalys
Tentamen
Tisdagen den 22 mars 2016

Skrivtid: 08.00-13.00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Lars Filipsson

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del A på tentamen utgörs av de första tre uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng, upp till som mest 12 poäng. Poängsumman på del A kan alltså bli högst 12 poäng, bonuspoäng medräknade. Bonuspoängen beräknas automatiskt och antalet bonuspoäng framgår av din resultatsida.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de sista tre uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Den 1:a januari 2006 låstes 10 kg av ett visst radioaktivt ämne in i en källare. Ämnet sönderfaller i en takt som är direkt proportionell mot hur mycket som finns kvar av ämnet. Halveringstiden är 50 år. Hur mycket finns kvar av ämnet den 1:a januari 2016?

2. Beräkna nedanstående integraler.

   A. $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin x + \cos x|\,dx$ (tips: dela upp integrationsintervallet)

   B. $\displaystyle\int_1^{e} x^2 \ln x\,dx$ (tips: använd partiell integration)

3. Betrakta funktionen f som ges av $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+1} + 2\arctan x$.

   A. Bestäm definitionsmängden till f.
   B. Bestäm de intervall där f är växande respektive avtagande.
   C. Avgör om f antar något största respektive minsta värde.
   D. Finn alla asymptoter till funktionsgrafen $y = f(x)$
   E. Bestäm med hjälp av ovanstående värdemängden till f.

DEL B

4. Vi ska Taylorutveckla funktionen $f(x) = \ln(1+x)$.
   A. Bestäm Taylorpolynomet av grad 4 kring punkten $x = 0$ till funktionen f.
   B. Använd polynomet i uppgift A för att beräkna ett närmevärde till $\ln 2$.
   C. Avgör om felet i ditt närmevärde är mindre än 0.25.

5. Vi ska bestämma tyngdpunkten (x_T, y_T) för övre halvan av den homogena enhetscirkelskivan, dvs området som ges av oliketerna $x^2 + y^2 \leq 1$ och $y \geq 0$. Av symmetriskäl är det uppenbart att $x_T = 0$, men y-koordinaten måste beräknas. Med hjälp av ett jämviktsresonemang kan man visa att

$$y_T = \frac{\displaystyle\int_0^1 2y\sqrt{1-y^2}\,dy}{\displaystyle\int_0^1 2\sqrt{1-y^2}\,dy}.$$

   Beräkna y-koordinaten för tyngdpunkten!

6. Ett föremål med massan m faller genom jordatmosfären mot jordens yta. Om vi antar att luftmotståndet är direkt proportionellt mot farten v fås enligt Newtons andra lag differentialekvationen

$$mv'(t) = -kv(t) + mg$$

   där k är en positiv konstant och g tyngdaccelerationen.
   A. Bestäm farten v vid en godtycklig tidpunkt t, om föremålet släpps från vila vid tidpunkten $t = 0$.
   B. Visa att farten enligt modellen inte kan öka obegränsat utan kommer att närma sig ett visst värde efter lång tid. Bestäm detta värde.

Var god vänd!

DEL C

7. Denna uppgift handlar om teorin kring lokala extrempunkter.
   A. Definiera vad som menas med en lokal maxpunkt till en funktion f.
   B. Bevisa följande påstående: Om funktionen f har en lokal maxpunkt i en inre punkt a i definitionsmängden och f är deriverbar i a, så är $f'(a) = 0$.
   C. Visa med ett exempel att en funktion kan ha en derivata som är 0 i en punkt utan att den punkten är en lokal extrempunkt.
   D. Visa med ett exempel att en funktion kan ha en lokal maxpunkt i en punkt utan att funktionen har en derivata som är 0 i den punkten.

8. Betrakta kurvan med ekvation $y = x^4$. För varje punkt (x, y) på kurvan (utom origo) så har kurvan en normallinje som skär y-axeln i exakt en punkt $(0, b)$. Bestäm det minsta möjliga värdet på b.

9. Avgör om den generaliserade integralen
$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{x \sin x + \sqrt{x}}$$
är konvergent eller divergent.