Institutionen för matematik

SF1669 Matematisk och numerisk analys II
Tentamen
Måndagen den 21 mars 2016

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Låt D vara fyrhörningen med hörn i punkterna $(0,0)$, $(6,0)$, $(0,5)$ och $(4,5)$.
   (a) Skissera fyrhörningen D och beräkna dess area. **(1 p)**
   (b) Bestäm fyrhörningens masscentrum. **(3 p)**

2. Vektorfältet $\mathbf{F}$ i planet ges av $\mathbf{F}(x,y) = (y^2, 2xy+1)$.
   (a) Avgör om $\mathbf{F}$ är konservativt. **(1 p)**
   (b) Beräkna kurvintegralen $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där C är kurvan som parametriseras av

$$\mathbf{r}(t) = \left(te^t, e^{t-1}\right), \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

(3 p)

3. Den plana kurvan C parametriseras av

$$\mathbf{r}(t) = \left(\sin t, \sin t + \sqrt{2}\cos t\right), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

   (a) Bestäm den högsta farten för en partikel som rör sig enligt denna parametrisering. **(2 p)**
   (b) Kurvan C är sluten och begränsar ett område i planet. Arean av detta område ges med Greens formel av kurvintegralen

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C y\,dx$$

   där $\mathbf{F}(x,y) = (y,0)$. Beräkna denna area. **(2 p)**

DEL B

4. Låt $f(x, y) = 2x - 20y + x^2 - xy^2 + 2y^3$.
   (a) Beräkna Taylorpolynomet av grad två till funktionen f kring punkten $(1, 2)$. **(2 p)**
   (b) Använd Taylorpolynomet för att avgöra om $f(x, y)$ har ett lokalt maximum, lokalt minimum eller ingetdera i punkten $(1, 2)$. **(2 p)**

5. Låt D vara kvartscylindern som ges av olikheterna
$$y^2 + z^2 \leq 9, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad y \geq 0 \quad \text{och} \quad z \geq 0.$$
Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 y, -y^2, yz^2)$ ut genom randen till D. **(4 p)**

6. Funktionen
$$f(x, y) = \sin(y) - \cos(x) - a\frac{xy}{2}, \qquad a = 1,$$
har en kritisk punkt nära $(x, y) = (1, 1)$.
   (a) Skriv ett Matlab-program som beräknar den den kritiska punkten med hjälp av Newtons metod för system. Felet i både x- och y-koordinaten ska vara mindre än 10^{-10}. **(3 p)**
   (b) Antag att a är en osäker parameter så att $a = 1 \pm 0.05$. Använd Matlab-programmet i deluppgift (a) för att bestämma felgränser i den kritiska punktens x- och y-koordinater. **(1 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. I denna uppgift antar vi att alla funktioner och vektorfält är kontinuerligt deriverbara.
   (a) Visa att ett konservativt vektorfält $\mathbf{F}(x, y, z)$ i tre dimensioner är *rotationsfritt*, det vill säga uppfyller $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. **(2 p)**
   (b) Vi säger att ett vektorfält $\mathbf{F}(x, y, z)$ i tre dimensioner har en *integrerande faktor* $f(x, y, z)$ om $f(x, y, z) \neq 0$ är en funktion sådan att vektorfältet $f\mathbf{F}$ är konservativt. Visa att om $\mathbf{F}$ har en integrerande faktor så är $\mathbf{rot}\,\mathbf{F}$ ortogonalt mot $\mathbf{F}$ överallt. **(2 p)**

8. Betrakta integralen
$$\iint_D x^2 + y^2\,dxdy.$$
där D är rektangeln som ges av $0 \leq x \leq 1$ och $-1 \leq y \leq 1$.
   (a) Approximera integralen med trapetsregeln i två dimensioner. Använd steglängden $h_x = 1/2$ i x-led och $h_y = 1$ i y-led. **(3 p)**
   (b) Hur många gånger mindre skulle felet i approximationen bli (ungefär) om man istället använde steglängden $h_x = 1/6$ i x-led och $h_y = 1/3$ i y-led. **(1 p)**

9. Bestäm den högst belägna punkt på paraboloiden $z = x^2 + 4y^2$ som är belyst av en punktljuskälla i $(8, 3, 0)$. **(4 p)**