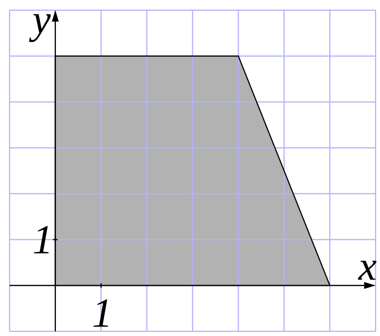
SF1669 Matematisk och numerisk analys II
Lösningsförslag till tentamen 2016-03-21

DEL A

1. Låt D vara fyrhörningen med hörn i punkterna $(0,0)$, $(6,0)$, $(0,5)$ och $(4,5)$.
   (a) Skissera fyrhörningen D och beräkna dess area. **(1 p)**
   (b) Bestäm fyrhörningens masscentrum. **(3 p)**

Lösningsförslag.

(a) Fyrhörningen är en parallelltrapets i och med att två av de fyra sidorna är parallella. Arean ges av basen gånger medelvärdet av höjden dvs $5 \cdot (6+4)/2 = 25$ areaenheter.



FIGUR 1. Fyrhörningen D

(b) Vi behöver beräkna medelvärdet av x och medelvärdet av y över området. Området bestäms av olikheterna $0 \le y \le 5$ och $0 \le x \le 6 - 2y/5$.

$$\begin{aligned}
\int_0^5 \int_0^{6-2y/5} (x,y)\,dxdy &= \int_0^5 \left[\left(\frac{x^2}{2}, xy\right)\right]_0^{6-2y/5} dy \\
&= \int_0^5 \left(\frac{(6-2y/5)^2}{2}, y(6-2y/5\right) dy \\
&= \left[\left(-\frac{5}{2}\frac{(6-2y/5)^3}{6}, 3y^2 - \frac{2y^3}{15}\right)\right]_0^5 \\
&= \left(-\frac{5}{2}\frac{4^3}{6} + \frac{5}{2}\frac{6^3}{6},\ 3\cdot 5^2 - \frac{2\cdot 5^3}{15}\right) \\
&= \left(-\frac{80}{3} + 90,\ 75 - \frac{50}{3}\right) = \left(\frac{190}{3}, \frac{175}{3}\right).
\end{aligned}$$

Därmed ges masscentrum av

$$\frac{1}{25}\left(\frac{190}{3}, \frac{175}{3}\right) = \left(\frac{38}{15}, \frac{7}{3}\right).$$

Svar.

(a) Området är en parallelltrapets med area 25 areaenheter.

(b) Områdets masscentrum ligger i punkten $(38/15, 7/3)$.

2. Vektorfältet $\mathbf{F}$ i planet ges av $\mathbf{F}(x, y) = (y^2, 2xy + 1)$.
   (a) Avgör om $\mathbf{F}$ är konservativt. **(1 p)**
   (b) Beräkna kurvintegralen $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där C är kurvan som parametriseras av
$$\mathbf{r}(t) = \left(te^t, e^{t-1}\right), \qquad 0 \le t \le 1.$$
(3 p)

Lösningsförslag.

(a) Eftersom vektorfältet är definierat över hela planet som är enkelt sammanhängande räcker det att kontrollera om det uppfyller att
$$\frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial y} = 0.$$
Vi har att
$$\frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial y} = 2y - 2y = 0.$$
Därmed är $\mathbf{F}$ konservativt. Vi kan också göra det genom att finna en potential. Genom integration med avseende på x får vi $\Phi(x, y) = xy^2 + g(y)$ och vid derivering med avseende på y får vi $2xy + g'(y) = 2xy + 1$. Därmed kan vi välja $g(y) = y$ och $\Phi(x, y) = xy^2 + y$ är en potential.

(b) Med hjälp av potentialen $\Phi(x, y) = xy^2 + y$ kan vi beräkna kurvintegralen som
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(e, 1) - \Phi(0, e^{-1}) = e + 1 - 0 \cdot e^{-2} - e^{-1} = e + 1 - e^{-1}.$$
Om vi ska beräkna integralen med hjälp av parametriseringen får vi $d\mathbf{r} = (e^t + te^t, e^{t-1})\, dt$ och integralen blir
$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 e^{2t-2}(1+t)e^t + (2te^t e^{t-1} + 1)e^{t-1}\, dt \\
&= \int_0^1 (1+t)e^{3t-2} + 2te^{3t-2} + e^{t-1}\, dt = \int_0^1 (1+3t)e^{3t-2} + e^{t-1}\, dt \\
&= \left[(1+3t)\frac{e^{3t-2}}{3} + e^{t-1}\right]_0^1 - \int_0^1 e^{3t-2}\, dt \\
&= \frac{4}{3}e - \frac{1}{3}e^{-2} + 1 - e^{-1} - \left[\frac{e^{3t-2}}{3}\right]_0^1 = e + 1 - e^{-1}.
\end{aligned}$$

Svar.

(a) Fältet är konservativt.

(b) Integralen är $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = e + 1 - e^{-1}$.

3. Den plana kurvan C parametriseras av

$$\mathbf{r}(t) = \left(\sin t, \sin t + \sqrt{2}\cos t\right), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

(a) Bestäm den högsta farten för en partikel som rör sig enligt denna parametrisering. **(2 p)**

(b) Kurvan C är sluten och begränsar ett område i planet. Arean av detta område ges med Greens formel av kurvintegralen

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C y\,dx$$

där $\mathbf{F}(x, y) = (y, 0)$. Beräkna denna area. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Partikelns hastighet ges av derivatan

$$\mathbf{r}'(t) = \left(\cos t, \cos t - \sqrt{2}\sin t\right)$$

och farten ges av beloppet av detta, dvs

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\cos^2 t + \cos^2 t - 2\sqrt{2}\sin t\cos t + 2\sin^2 t} = \sqrt{2 - 2\sqrt{2}\sin t\cos t} = \sqrt{2 - \sqrt{2}\sin 2t}.$$

Detta blir som störst när $\sin 2t = -1$, dvs vid $t = 3\pi/4$ och vid $t = 7\pi/4$. Då har vi $|\mathbf{r}'(3\pi/4)| = |\mathbf{r}'(7\pi/4)| = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

(b) För att bestämma arean beräknar vi kurvintegralen enligt parametriseringen och behöver $d\mathbf{r} = (\cos t, \cos t - \sqrt{2}\sin t)dt$ vilket ger

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C y\,dx = \int_0^{2\pi} \Big((\sin t + \sqrt{2}\cos t)(\cos t) + 0 \cdot (\cos t - \sqrt{2}\sin t)\Big)\,dt \\ = \int_0^{2\pi} \left(\sin t\cos t + \sqrt{2}\cos^2 t\right)\,dt = \pi\sqrt{2},\end{aligned}$$

där vi använt oss av att $\cos^2 t$ har medelvärde $1/2$ och $\sin t\cos t = 1/2\sin 2t$ har medelvärde noll.

Svar.

(a) Högsta farten är $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ längdenheter per tidsenhet.

(b) Områdets area är $\sqrt{2}\pi$ areaenheter.

DEL B

4. Låt $f(x,y) = 2x - 20y + x^2 - xy^2 + 2y^3$.
   (a) Beräkna Taylorpolynomet av grad två till funktionen f kring punkten $(1,2)$. **(2 p)**
   (b) Använd Taylorpolynomet för att avgöra om $f(x,y)$ har ett lokalt maximum, lokalt minimum eller ingetdera i punkten $(1,2)$. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) VI beräknar derivatorna och får

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2 + 2x - y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -20 - 2xy + 6y^2$$

och

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2x + 12y.$$

När vi sätter in $(x,y) = (1,2)$ får vi $f(1,2) = 2 - 40 + 1 - 4 + 16 = -25$ och

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -4,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 22.$$

Därmed ges Taylorpolynomet av grad två av

$$\begin{aligned} P(x,y) &= -25 + \tfrac{1}{2}\left(2(x-1)^2 - 2\cdot 4(x-1)(y-2) + 22(y-2)^2\right) \\ &= -25 + (x-1)^2 - 4(x-1)(y-2) + 11(y-2)^2. \end{aligned}$$

(b) I och med att Taylorpolynomet saknar linjära termer är $(1,2)$ en kritisk punkt till $f(x,y)$. Vi behöver se på den kvadratiska formen $Q(h,k) = h^2 - 4hk + 11k^2$. Med kvadratkomplettering får vi

$$h^2 - 4hk + 11k^2 = (h-2k)^2 + 7k^2 \geq 0$$

som visar att punkten $(1,2)$ är ett lokalt minimum för f. Vi kan också se detta genom att se på egenvärdena, λ_1 och λ_2, för den symmetriska matrisen som svarar mot den kvadratiska formen, dvs för

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 11 \end{bmatrix}$$

I och med att både spåret, dvs $\lambda_1 + \lambda_2 = 12$, och determinanten, dvs $\lambda_1\lambda_2 = 11 - 4 = 7$, är positiva måste båda egenvärdena vara positiva och den kvadratiska formen positivt definit. Slutsatsen blir på nytt att punkten är ett lokalt mimimum.

Svar.

(a) Taylorpolynomet är $P(x,y) = -25 + (x-1)^2 - 4(x-1)(y-2) + 11(y-2)^2$.
(b) Punkten $(1,2)$ är ett lokalt minimum för funktionen f.

5. Låt D vara kvartscylindern som ges av olikheterna

$$y^2 + z^2 \leq 9, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad y \geq 0 \quad \text{och} \quad z \geq 0.$$

Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2y, -y^2, yz^2)$ ut genom randen till D.

(4 p)

Lösningsförslag. I och med att fältet är kontinuerligt deriverbart och randytan är sluten och styckvis kontinuerligt deriverbar kan vi använda divergenssatsen för att beräkna flödet. Divergensen ges av

$$\mathbf{div}\,\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial z} = 2xy - 2y + 2yz.$$

Eftersom området som innesluts av ytan är en cylinder i x-led över en kvartscirkel i yz-planet är det lämpligt att använda cylinderkoordinater med $y = r\cos\theta$ och $z = r\sin\theta$. Flödet genom ytan S som innesluter området D blir nu enligt divergenssatsen

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= \iiint_D \mathbf{div}\,\mathbf{F}\,dxdydz \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^3\int_0^2 \big(2xr\cos\theta - 2r\cos\theta + 2r^2\cos\theta\sin\theta\big)\ r dxdrd\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^3 \big[(x^2-2x)r^2\cos\theta + xr^3\sin 2\theta\big]_0^2\ drd\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^3 2r^3\sin 2\theta\,drd\theta \\
&= \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^3 [-\cos 2\theta]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{81}{4}(-(-1)-(-1)) = \frac{81}{2}.
\end{aligned}$$

(Genom att bertrakta symmetrin i planet $x = 1$ hade vi kunnat bortse från de två första termerna i $\mathbf{div}\,\mathbf{F}$ eftersom $2(x-1)y$ genom symmetrin har medelvärde noll över cylindern.)

Det går också att beräkna flödet genom ytans fem olika delar. De ytor som ger något bidrag är dels $x = 2$ då vi behöver integrera $\iint_D 4y\,dydz$ där D är en kvartscirkel med radie 3, vilket ger 36, dels den buktiga ytan där vi behöver integrera $\iint_S (yz^3 - y^3)/3\,dydz$, vilket ger $9/2$.

Svar. Flödet ut genom ytan är $81/2$.

6. Funktionen

$$f(x, y) = \sin(y) - \cos(x) - a\frac{xy}{2}, \qquad a = 1,$$

har en kritisk punkt nära $(x, y) = (1, 1)$.

(a) Skriv ett Matlab-program som beräknar den den kritiska punkten med hjälp av Newtons metod för system. Felet i både x- och y-koordinaten ska vara mindre än 10^{-10}. **(3 p)**

(b) Antag att a är en osäker parameter så att $a = 1 \pm 0.05$. Använd Matlab-programmet i deluppgift (a) för att bestämma felgränser i den kritiska punktens x- och y-koordinater. **(1 p)**

Lösningsförslag.

(a) Den kritiska punkten är en lösning till ekvationssystemet $\nabla f = 0$, dvs

$$\begin{cases} \sin(x) - a\frac{y}{2} & = & 0, \\ \cos(y) - a\frac{x}{2} & = & 0. \end{cases}$$

Jakobiamatrisen för systemet blir

$$J(x, y) = D\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \cos(x) & -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} & -\sin(y) \end{bmatrix}$$

Följande Matlab-funktion löser systemet med Newtons metod för ett givet värde på a.

```
%- kritisk.m  -------------------------------------------
function Xk = kritisk(a)

% Låt X = (X(1),X(2)) = (x,y)
% Definiera funktion och Jakobianmatris

F = @(X) [sin(X(1))-a*X(2)/2;
          cos(X(2))-a*X(1)/2];

J = @(X) [cos(X(1)) -a/2;
          -a/2 -sin(X(2))];

X=[1; 1]; % Startgissning
d=1;      % Dummy

while max(abs(d))>1e-10 % Maxnorm -- största felet
    d = -J(X)\ F(X);
    X = X + d;
end;

Xk = X;
%-------------------------------------------------------
```

(b) Med hjälp av experimentell störningsräkning hittar vi felgränser i $x = x(a)$ och $y = y(a)$, enligt

$$E_x \approx |x(\tilde{a} + E_a) - x(\tilde{a})|, \qquad E_y \approx |y(\tilde{a} + E_a) - y(\tilde{a})|,$$

där $\tilde{a} = 1$ och $E_a = 0{,}05$. I Matlab blir det

```
%-------------------------------------------------------
X = kritisk(1);
Xs = kritisk(1.05);
E = abs(X-Xs);
Ex = E(1);
Ey = E(2);
%-------------------------------------------------------
```

Det ger $E_x \approx 0{,}020$ and $E_y \approx 0{,}029$.

DEL C

7. I denna uppgift antar vi att alla funktioner och vektorfält är kontinuerligt deriverbara.
   (a) Visa att ett konservativt vektorfält $\mathbf{F}(x, y, z)$ i tre dimensioner är *rotationsfritt*, det vill säga uppfyller $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. **(2 p)**
   (b) Vi säger att ett vektorfält $\mathbf{F}(x, y, z)$ i tre dimensioner har en *integrerande faktor* $f(x, y, z)$ om $f(x, y, z) \neq 0$ är en funktion sådan att vektorfältet $f\mathbf{F}$ är konservativt. Visa att om $\mathbf{F}$ har en integrerande faktor så är $\mathbf{rot}\,\mathbf{F}$ ortogonalt mot $\mathbf{F}$ överallt. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Om $\mathbf{F}$ är konservativt finns en potential, dvs en funktion Φ så att $\mathbf{F} = \mathbf{grad}\,\Phi = \nabla\Phi$. Detta ger

$$\mathbf{F} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right).$$

När vi sedan beräknar rotationen $\mathbf{rot}\,\mathbf{F}$ får vi

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}\,\mathbf{F} &= \left(\frac{\partial\mathbf{F}_3}{\partial y} - \frac{\partial\mathbf{F}_2}{\partial z}, \frac{\partial\mathbf{F}_1}{\partial z} - \frac{\partial\mathbf{F}_3}{\partial x}, \frac{\partial\mathbf{F}_2}{\partial x} - \frac{\partial\mathbf{F}_1}{\partial y}\right)\\ &= \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial y}, \frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}, \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x}\right) = (0, 0, 0)\end{aligned}$$

i och med att de blandade partiella derivatorna är lika när de är kontinuerliga.

(b) Låt f vara en funktion sådan att vektorfältet $\mathbf{G} = f\mathbf{F}$ är konservativt. Vi har då enligt del (a) att

$$\begin{aligned}\mathbf{0} = \mathbf{rot}\,\mathbf{G} &= \left(\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{F}_3 - \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{F}_2, \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{F}_1 - \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{F}_3, \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{F}_2 - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{F}_1\right) + f\,\mathbf{rot}\,\mathbf{F}\\ &= (\nabla f) \times \mathbf{F} + f\,\mathbf{rot}\,\mathbf{F}\end{aligned}$$

så det räcker att visa att den första termen är ortogonal mot $\mathbf{F}$ överallt i och med att f aldrig är noll. Detta kan vi visa genom att använda skalärprodukten och får då $\mathbf{F} \cdot (\nabla f \times \mathbf{F}) = 0$, eller utskrivet med alla termer

$$\begin{aligned}&\mathbf{F} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{F}_3 - \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{F}_2, \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{F}_1 - \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{F}_3, \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{F}_2 - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{F}_1\right)\\ &= \mathbf{F}_1\left(\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{F}_3 - \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{F}_2\right) + \mathbf{F}_2\left(\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{F}_1 - \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{F}_3\right) + \mathbf{F}_3\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{F}_2 - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{F}_1\right)\\ &= \mathbf{F}_1\mathbf{F}_3\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\right) + \mathbf{F}_2\mathbf{F}_1\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) + \mathbf{F}_3\mathbf{F}_2\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0.\end{aligned}$$

8. Betrakta integralen
$$\iint_D x^2 + y^2 \, dxdy.$$
där D är rektangeln som ges av $0 \leq x \leq 1$ och $-1 \leq y \leq 1$.
   (a) Approximera integralen med trapetsregeln i två dimensioner. Använd steglängden $h_x = 1/2$ i x-led och $h_y = 1$ i y-led. **(3 p)**
   (b) Hur många gånger mindre skulle felet i approximationen bli (ungefär) om man istället använde steglängden $h_x = 1/6$ i x-led och $h_y = 1/3$ i y-led. **(1 p)**

Lösningsförslag.

(a) Låt $x_j = jh_x$ och $y_k = -1 + kh_y$. Trapetsregeln i två dimensioner lyder då
$$\iint_D x^2 + y^2 dydx \approx \sum_{j=0}^{n_x} \sum_{k=0}^{n_y} f_{j,k} h_x h_y w_{j,k}, \qquad f_{j,k} = x_j^2 + y_k^2,$$
där $h_x = 1/n_x$, $h_y = 2/n_y$ och vikterna ges av
$$w_{j,k} = \begin{cases} 1, & \text{inre punkt,} \\ 1/2, & \text{kantpunkt,} \\ 1/4, & \text{hörnpunkt.} \end{cases}$$
I fallet $h_x = 1/2$ och $h_y = 1$ har vi $n_x = n_y = 2$ och om vi samlar ihop f_{jk}-värdena i en matris,
$$\begin{pmatrix} f_{00} & f_{01} & f_{02} \\ f_{10} & f_{11} & f_{12} \\ f_{20} & f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & 0+0 & 0+1 \\ 1/4+1 & 1/4+0 & 1/4+1 \\ 1+1 & 1+0 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5/4 & 1/4 & 5/4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Det ger
$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{n_x} \sum_{k=0}^{n_y} f_{j,k} h_x h_y w_{j,k} \\ &\qquad = \left(\frac{1}{4} (f_{00} + f_{02} + f_{20} + f_{22}) + \frac{1}{2} (f_{01} + f_{10} + f_{21} + f_{12}) + f_{11} \right) h_x h_y \\ &\qquad = \left(\frac{6}{4} + \frac{14}{8} + \frac{1}{4} \right) \frac{1}{2} = \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

(b) Vi noterar att trapetsregeln är en andra ordningens metod, d.v.s. felet är proportionellt mot kvadraten av steglängden. När steglängden minskas med en faktor 3, minskar då felet med en faktor $3^2 = 9$.

Svar.

(a) Trapetsmetoden ger approximationen $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2) \, dxdy \approx \frac{7}{4}$.

(b) Felet minskar med en faktor 9.

9. Bestäm den högst belägna punkt på paraboloiden $z = x^2 + 4y^2$ som är belyst av en punktljuskälla i $(8, 3, 0)$. **(4 p)**

Lösningsförslag. Gränsen av det belysta området består av de punkter på paraboloiden där ljusstrålarna från $P = (8, 3, 0)$ tangerar ytan. Detta betyder att gradienten för $x^2 + 4y^2 - z$ ska vara vinkelrät mot linjen. Detta ger villkoret

$$(2x, 8y, -1) \cdot (x - 8, y - 3, z) = 0 \Longrightarrow 2x(x - 8) + 8y(y - 3) - z = 0.$$

Punkterna ska dessutom ligga på paraboloiden så vi söker punkter på kurvan som ges av ekvationssystemet

$$\begin{cases} z &= 2x(x - 8) + 8y(y - 3) \\ z &= x^2 + 4y^2 \end{cases}$$

som är ekvivalent med

$$\begin{cases} z &= x^2 + 4y^2 \\ 0 &= x(x - 16) + 4y(y - 6) \end{cases}$$

Vi söker det maximala värdet för z under dessa villkor, vilket är detsamma som att maximerar $f(x, y) = x^2+4y^2$ under bivillkoret $g(x, y) = 0$ där $g(x, y) = x(x-16)+4y(y-6)$. Detta är en ellips i xy-planet och vi kan använda Lagranges metod för att se att vi måste ha gradienterna till f och g parallella vid optima. Detta ger villkoret att $(2x, 8y)$ ska vara parallell med $(2(x-8), 8(y-3))$, vilket ger $16x(y-3) = 16y(x-8)$. Alltså måste $8y = 3x$ och $x = \lambda a$ och $y = \lambda b$ för något λ. Insatt i bivillkoret ger det $\lambda(\lambda-2)8^2+4\lambda(\lambda-2)3^2 = 0$, dvs $100\lambda(\lambda - 2) = 0$. När $\lambda = 0$ får vi $x = y = z = 0$ och när $\lambda = 2$ får vi $x = 16$, $y = 6$ och $z = x^2 + 4y^2 = 4 \cdot 8^2 + 16 \cdot 3^2 = 400$. Därmed blir den högst belägna belysta punkten $(x, y, z) = (16, 6, 400)$.

Svar. Den högst belägna belysta punkten är $(x, y, z) = (16, 6, 400)$.