Written exam for HF1013, Discrete Mathematics:TEN1, 5 credits, March 2016

Allowed aids: A sheet of hand-written notes, notes on **one** side only. (No computer print-outs!) And one pocket calculator. Part `A` may be skipped by those who passed mid-term exams. (Full points awarded.)

PART A. Tick the correct boxes: Below are 4 propositions, each is either **true** or **false**. If you tick the correct box, you will get +1 point. If you tick the wrong box, you will get −1 point. You can also **pass** on a question, that gives 0 points. (You cannot get a negative subtotal on part A.)

1. The following argument is correct (följande slutledning är korrekt): 1. $p \vee q \vee r$ and 2. $\neg p \vee \neg q \Rightarrow r$.
   ☐**true** ☐**false** ☐**pass**

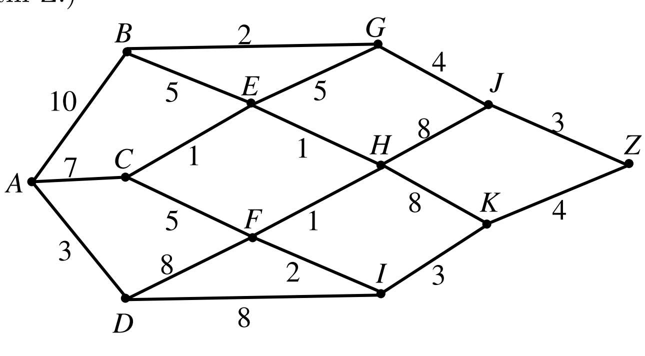
2. Let n, m be two positive integers > 1. (Låt n, m vara två positiva heltal > 1.) Further, let $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$ and $m = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\beta_r}$ be the two standardized prime factorizations of n, m respectively. (De standardmässiga primtalsfaktoriseringarna.) Then we have (då gäller):
$$n|m \wedge m|n \Leftrightarrow \alpha_1 = \beta_1 \wedge \alpha_2 = \beta_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_r = \beta_r.$$
   ☐**true** ☐**false** ☐**pass**

3. For all integers, a, b, c, the following is true: If $10a - 9b = 1$ and $a|bc$ then $a|c$.
   För alla heltal, a, b, c, så är följande sant: Om $10a - 9b = 1$ och $a|bc$ så gäller $a|c$.
   ☐**true** ☐**false** ☐**pass**

4. For a connected weighted graph there can be several different minimal spanning trees with different totals costs. (För en sammanhängande viktad graf kan det finnas flera olika minimala uppspännande träd med olika totala kostnader.)
   ☐**true** ☐**false** ☐**pass**

PART B. Give complete and correct solutions, write legibly. Motivate each logic step fully. No points for answers only. Each problem is worth 3 points. (Some Swedish translations are given.)

5. Execute Dijkstra's Algorithm, showing *every* step (with candidate labels), labeling *each* vertex in the graph below and find the shortest path from A to Z. (Kör Dijkstras Algoritm i nedanstående graf, visa *varje* delsteg (med kandidater till etiketter) och sätt etiketter på *alla* hörn och finn kortaste vägen från A till Z.)



6. Kalle, Olle, Lisa och Anna äter på lunchrestaurangen. Efter maten får Kalle i uppdrag att hämta fika till allihopa. Det finns kaffe och te att välja på. Varje person ska ha precis en av dessa drycker och i varje dryck kan socker och mjölk ingå var för sig, tillsammans eller inte alls.

   Men Kalle är glömsk och minns inte exakt vem som skulle ha vad. Han vet dock att han själv vill ha kaffe med mjölk utan socker. (a) *1p* Om han bara chansar på vad de andra ska ha, hur stor är sannolikheten att han väljer rätt? (b) *1p* Plötsligt minns han att det var ett jämnt antal personer som skulle ha kaffe. Nu vet han mer hur han ska chansa. Hur stor är sannolikheten nu att han väljer rätt? (c) *1p* Slutligen minns han *också* att det var ett udda antal personer som inte ville ha varken socker eller mjölk. Hur stor är sannolikheten nu att han väljer rätt? ("Rätt" = alla får exakt det de vill ha.)

7. Om vi slumpvis från de *jämna* heltalen i mängden $\{1, 2, \ldots, 10000\}$ väljer ett heltal x, hur stor är då sannolikheten att x är delbart med 3 men inte med 5?

8. The following proof is incomplete. Fill in the missing details where the ellipses (...) appear.
   Statement: For every positive integer n we have $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
   Proof: Mathematical induction over $n \geq 1$. For every positive n call the predicate that the statement is true $A(n)$, that is introduce
$$A(n) \Leftrightarrow LHS_n = RHS_n \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$
Step 1. We first verify that $A(1)$ is true, which can easily be seen by ...
Step 2. *The induction step.* Prove that the implication $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ is true for each $p \geq 1$. Therefore assume that ...
Step 3. Finally ...

9. The following statement is true but the proof contains an error. Find the error (1p) and correct it (2p).
   Statement: For all integers n the number $n(n+2)(n+4)$ is divisible by 3.
   Proof: Either n itself is divisible by 3 or not. If n is divisible by 3 then we can write $n = 3k$ for some integer k. Then $n(n+2)(n+4) = 3k(3k+2)(3k+4) = 3 \cdot k(3k+2)(3k+4)$ which clearly is divisible by 3. If n is not divisible by 3 we can write $n = 3k+1$ and then $n(n+2)(n+4) = (3k+1)(3k+1+2)(3k+1+4) = (3k+1)(3k+3)(3k+5) = 3 \cdot (3k+1)(k+1)(3k+5)$ which again clearly is divisible by 3. This completes the proof.

10. Let n be any positive integer. Denote by σ the sum of all the digits in the decimal representation of n. (For example, if $n = 123$, then $\sigma = 1+2+3 = 6$.) Prove that $9|n \Leftrightarrow 9|\sigma$. (Låt n vara vilket positivt heltal som helst. Beteckna med σ siffersumman i den decimala representationen av n. (Till exempel, om $n = 123$ så är $\sigma = 1+2+3 = 6$.) Bevisa att $9|n \Leftrightarrow 9|\sigma$.)

11. Consider the set of all pairs of natural numbers (betrakta mängden av alla par av naturliga tal) $\Omega = \{(p,q); p, q \in \mathbb{N}\}$. Define the relation (definiera relationen) $\mathcal{R}$ on (på) Ω by setting (genom att sätta) $(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow a|c \wedge d|b$. Answer the following two questions: (besvara följande:)
    (a) What properties does $\mathcal{R}$ have? Reflexive, symmetric, antisymmeric, transitive? (Vilka egenskaper har $\mathcal{R}$? Reflexiv, symmetrisk, antisymmetrisk, transitiv?) (2p)
    (b) Is $\mathcal{R}$ an equivalence relation and/or a partial order? (Är $\mathcal{R}$ en ekvivalensrelation och/eller en partiell ordningsrelation?) (1p)
    Complete motivations must be given. (Fullständiga motiveringar krävs.)

12. Assume that A, B, C, D are any four sets. Prove, by manipulating set formulas, (bevisa följande formel genom att använda formelmanipulation,)
$$A \times B - C \times D = A \times (B - D) \cup (A - C) \times (B \cap D).$$
Hint: Write $(C \times D)^c$ as $M_1 \cup M_2$ where $M_1 = C^c \times D$ and M_2 is another appropriately chosen set. Without proof you may also use the set formulas for the distributive laws: $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$, $X \times (Y \cap Z) = (X \times Y) \cap (X \times Z)$, $(X \cap Y) \times (Z \cap W) = (X \times Z) \cap (Y \times W)$ and similar.

1 point per problem in part A. 3 points per problem in part B. Totally 28 points.
To pass 14 points must be reached.