KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Bedömningskriterier till tentamen
Måndagen den 21 mars 2016

Allmänt gäller följande:

- För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.
- Om lösningen helt saknar förklarande text, eller motsvarande förklaring i form av logiska symboler, till beräkningar och formler ges högst två poäng. Detta markeras vid bedömningen med FTS (Förklarande text saknas).
- Om lösningen har förklarande text men inte tillräckligt för att det ska gå att förstå alla steg ges högst tre poäng sammanlagt på uppgiften. Detta markeras med FLFT (För lite förklarande text).
- Mindre räknefel ger i allmänhet inte avdrag om de inte ändrar uppgiftens karaktär eller leder till orimligheter som borde ha upptäckts.
- Lösningen ska kunna läsas av en person som inte är insatt i problemet i förväg. Bevisbördan ligger på den som skriver, inte på den som läser.

(1) Låt D vara fyrhörningen med hörn i punkterna $(0,0)$, $(6,0)$, $(0,5)$ och $(4,5)$.
(a) Skissera fyrhörningen D och beräkna dess area. **(1 p)**
(b) Bestäm fyrhörningens masscentrum. **(3 p)**

Bedömning:
(a)
- Korrekt figur med korrekt area, **1 poäng**.

(b)
- Korrekt formel för beräkning av masscentrum, **1 poäng**.
- Korrekt uppställda dubbelintegraler med korrekta gränser, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av masscentrum, **1 poäng**.

---

(2) Vektorfältet $\mathbf{F}$ i planet ges av $\mathbf{F}(x,y) = (y^2, 2xy+1)$.
(a) Avgör om $\mathbf{F}$ är konservativt. **(1 p)**
(b) Beräkna kurvintegralen $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där C är kurvan som parametriseras av

$$\mathbf{r}(t) = \left(te^t, e^{t-1}\right), \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

(3 p)

Bedömning:
(a)
- Korrekt motivering till att fältet är konservativt, **1 poäng**.

(b) (Med potential)
- Korrekt bestämd potential, **1 poäng**.
- Korrekt formel för att beräkna integralen med hjälp av potentialen, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av kurvintegralen, **1 poäng**.

(c) (Med parametriseringen)
- Korrekt uppställd enkelintegral med hjälp av parametriseringen, **1 poäng**.
- Principiellt korrekt integration, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av kurvintegralen, **1 poäng**.

---

(3) Den plana kurvan C parametriseras av

$$\mathbf{r}(t) = \left(\sin t, \sin t + \sqrt{2}\cos t\right), \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

(a) Bestäm den högsta farten för en partikel som rör sig enligt denna parametrisering. **(2 p)**

(b) Kurvan C är sluten och begränsar ett område i planet. Arean av detta område ges med Greens formel av kurvintegralen

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C y\,dx$$

där $\mathbf{F}(x, y) = (y, 0)$. Beräkna denna area. **(2 p)**

Bedömning:

(a)
- Korrekt beräkning av farten, **1 poäng**.
- Korrekt beräkning av maximala farten, **1 poäng**.

(b)
- Korrekt uppställd enkelintegral från parametriseringen, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av arean, **1 poäng**.

---

(4) Låt $f(x, y) = 2x - 20y + x^2 - xy^2 + 2y^3$.

(a) Beräkna Taylorpolynomet av grad två till funktionen f kring punkten $(1, 2)$. **(2 p)**

(b) Använd Taylorpolynomet för att avgöra om $f(x, y)$ har ett lokalt maximum, lokalt minimum eller ingetdera i punkten $(1, 2)$. **(2 p)**

Bedömning:

(a)
- Korrekta partialderivator upp till ordning två, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av Taylorpolynomet i den givna punkten, **1 poäng**.

(b)
- Korrekt motivering till att $(1, 2)$ är en kritisk punkt, **1 poäng**.
- Korrekt användning av Taylorpolynomet för att avgöra att funktionen har är ett lokalt minimum i punkten, **1 poäng**.

---

(5) Låt D vara kvartscylindern som ges av olikheterna

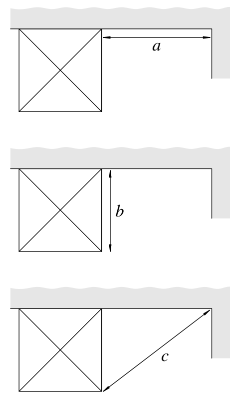
$$y^2 + z^2 \le 9, \quad 0 \le x \le 2, \quad y \ge 0 \quad \text{och} \quad z \ge 0.$$

Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 y, -y^2, yz^2)$ ut genom randen till D. **(4 p)**

Bedömning:

(a)
- Korrekt hänvisning till divergenssatsen, **1 poäng**.
- Korrekt beräkning av divergensen, **1 poäng**.
- Korrekt uppställd trippelintegral för att beräkna flödet med hjälp av divergenssatsen, inklusive korrekta gränser och införda cylinderkoordinater, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av flödet, **1 poäng**.

(6) Osquar ska inreda en myshörna i sin lägenhet och vill därför mäta avståndet a mellan ett skåp och motstående vägg. Eftersom det ligger en massa bråte i vägen är det svårt att mäta avståndet a direkt, så han mäter istället avstånden b och c, enligt figuren



och får

$$b = 12 \pm 0{,}01 \text{ dm},$$
$$c = 20 \pm 0{,}01 \text{ dm}.$$

Sedan använder han Pythagoras sats för att bestämma ett uttryck för a i b och c. Använd linjarisering (linjär approximation) av detta uttryck för att bestämma a med felmarginal.

(4 p)

Bedömning:

- Korrekt uttryck för a och korrekt värde för de givna värdena för b och c, **1 poäng**.
- Korrekt formel för linjariseringen, **1 poäng**.
- Korrekt beräkning av partialderivatorna, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av felgränserna, **1 poäng**.

---

(7) I denna uppgift antar vi att alla funktioner och vektorfält är kontinuerligt deriverbara.

(a) Visa att ett konservativt vektorfält $\mathbf{F}(x, y, z)$ i tre dimensioner är *rotationsfritt*, det vill säga uppfyller $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. **(2 p)**

(b) Vi säger att ett vektorfält $\mathbf{F}(x, y, z)$ i tre dimensioner har en *integrerande faktor* $f(x, y, z)$ om $f(x, y, z) \neq 0$ är en funktion sådan att vektorfältet $f\mathbf{F}$ är konservativt. Visa att om $\mathbf{F}$ har en integrerande faktor så är $\mathbf{rot}\,\mathbf{F}$ ortogonalt mot $\mathbf{F}$ överallt.

(2 p)

Bedömning:

(a)
- Korrekt beräkning av $\nabla \times \nabla\Phi$, **1 poäng**.
- Korrekt motivering till varför de blandade derivatorna är lika, **1 poäng**.

(b)
- Korrekt motivering till att det är $\cdot(\nabla f \times \mathbf{F}) = \mathbf{0}$ som ska visas, **1 poäng**.
- Korrekt motivering till att detta stämmer, **1 poäng**.

---

(8) Inom datalogin studeras bland annat hur slumpträd uppdateras vid slumpmässigt borttagande av element. Då behöver trippelintegralen

$$\iiint\limits_{0 \le x \le y \le z \le 1} \big((y-x)^k - (z-y)^k\big)\,dx\,dy\,dz$$

beräknas där k är ett positivt heltal. Beräkna denna trippelintegral för alla $k > 0$. (*Ledning:* Beräkningarna kan bli olika komplicerade beroende på i vilken ordning integrationerna utförs.) **(4 p)**

Bedömning:

(9)
- Uppställd trippelintegral med gränser för vardera variabel, **1 poäng**.
- Korrekt genomförd upprepad integration i ett steg, **1 poäng**.
- Korrekt genomförd upprepad integration i två steg om detta behövs, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av integralen, **1 poäng**.
