Håkan Wennlöf
hwennlof@kth.se

Övning 2

Teori

• **Coulombs lag**

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

ε_0: elektriska konstanten (vakuumpermittivitet)

$\varepsilon_0 \simeq 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m

• **Elektriskt fält** $\bar{E}$ [N/C = V/m]

på avstånd r från laddning.

– Punktladdning q: $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

– Linjeladdning med laddningstäthet λ [C/m]

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

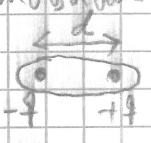
– Ytladdning med laddningstäthet σ [C/m²]

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$ (avståndsoberoende)

För linje- och ytladdning: gäller då r << längd på linje/yta.

E-fält **superpositioneras**. Lägg ihop för totala!

• **Elektrisk dipol** Två motsatta laddningar på fast avstånd d:



Dipolmoment $\bar{p} = q \cdot \bar{d}$ [C·m]

• **Elektriska kraft** på en laddning q:

$F = q \cdot E$, E är det yttre elektriska fältet.

- <u>Gauss sats</u>

$$\oiint_S \bar{E} \cdot d\bar{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Integralen över sluten <u>Gaussyta</u> ger totala laddningen som innesluts av ytan.

- <u>Spänning</u> Skillnad i elektrisk potential mellan två punkter, a och b.

$$U_{ab} = U_a - U_b = \int_a^b \bar{E} \cdot d\bar{r} \qquad [V]$$

oberoende av väg.

- <u>Potentiell energi</u> hos laddning q på potential U är energin som krävs för att flytta laddningen från potential 0 till potential U

$$W = q \cdot U \qquad [J].$$

Mer allmänt, energin för att flytta från startpotentialen U_1 till slutpotentialen U_2:

$$W = q(U_2 - U_1).$$

Övning 2

Garn

Givet: $L = 1$ cm, $r = 10$ µm (radie), $\rho = 500$ kg/m³

$q = 10^6 \cdot e$

Sökt: Fältstyrka som ger F 100 ggr större än gravitationen. Är det möjligt?

Lösning:

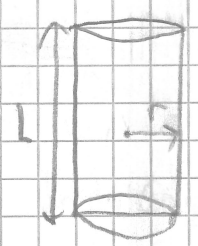
Formler: $\bar{F} = q \cdot \bar{E}$

Vet att tyngdkraften är $F_g = mg$

Massan?

$m = \rho \cdot V$, V volymen.

Cylindrisk: $V = L \cdot \pi r^2$



$V = 0{,}01\ \text{m} \cdot \pi \cdot (10^{-5}\ \text{m})^2 \approx 3{,}1 \cdot 10^{-12}\ \text{m}^3$.

$F_e = qE = 10^6 \cdot e \cdot E$.

Söker E, sn. $F_e = 100 F_g$.

$\Rightarrow 10^6 e E = 100 \rho V g \Rightarrow E = \frac{\rho V g}{10^6 e} \cdot 100 = \frac{\rho V g}{10^4 e}$

$\Rightarrow E = \frac{500\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 3{,}1 \cdot 10^{-12}\ \text{m}^3 \cdot 9{,}82\ \text{m/s}^2}{10^4 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}} \approx \underline{\underline{9{,}6\ \text{MV/m}}}$

$[C] = A \cdot s$

$[V] = \frac{\text{kg}\ \text{m}^2}{A \cdot s^3} \Rightarrow \frac{\text{kg}\ \text{m/s}^2}{C} = \frac{V}{m}$

Överslagsfält i luft: ~2 MV/m.

Alltså inte möjligt. Skulle bli överslag!

Dipolsmuts **Givet:** Dipolmoment $\bar{p} = q \cdot \bar{d} = 10^{-29}$ Cm

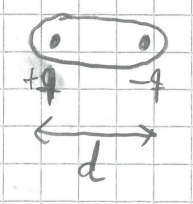
Sitter fast med $F = 10^{-20}$ N.

Fältstyrka $E = 10^{5}$ V/m. Trådladdning (lång).

Sökt: Avstånd r till trådladdningen.

Lösning:

Dipol: Två laddningar, $+q$ och $-q$, avst. d.

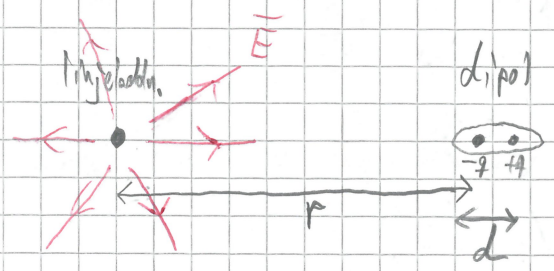


$$p = q \cdot d$$

E-fält från linjeladdning:

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}, \quad \lambda \ [C/m] \text{ laddningsfördelning.}$$

Rita!



Kraften på dipolen: summan av kraften på laddningarna i den! $\bar{F}_{tot} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$

$$\bar{F} = q\bar{E}$$

$$\Rightarrow F = F_1 + F_2 = -q \cdot E(r) + q \cdot E(r+d) =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} q \left(\frac{1}{r+d} - \frac{1}{r} \right) = \frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1 - \left(1 + \frac{d}{r}\right)}{r+d} \right) =$$

$$= \frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{d}{r(r+d)} \right) \simeq \left\{ \begin{matrix} d \ll r \\ \Rightarrow r+d \simeq r \end{matrix} \right\} \simeq -\frac{\lambda q d}{2\pi\varepsilon_0 r^2} = \{ p = qd \} = -\frac{\lambda p}{2\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$= \left\{ E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \right\} = \underline{\underline{-\frac{Ep}{r}}}.$$

Vill hitta avstånd r som ger rätt kraft, vid högsta tillåtna fältstyrka E.

Vi bortser från kraftriktning, kollar på styrkan (absolutbeloppet). (Kraften riktad mot tråden här, precis som vi vill).

Vi får $r = \frac{Ep}{|F|} = \frac{10^5 \frac{V}{m} \cdot 10^{-29} C \cdot m}{10^{-20} N}$

$$= \left\{ \begin{array}{l} [V \cdot C] = \frac{kg \cdot m^2}{A \cdot s^3} \cdot A \cdot s \\ = kg \cdot m^2 / s^2 \end{array} \right\} = 10^{-4} m = \underline{\underline{0{,}1 \text{ mm}}}.$$

Svar:
Man måste vara högst 0,1 mm ifrån med trådladdningen.

Lysdiod Givet: E-fält, beror av avstånd som

$$E_x(x) = E_0 \cdot \frac{1}{\left(\frac{x^2}{x_0^2}\right) + 1}, \quad x_0 = 3 \mu m.$$

Sökt: Maximala värdet på E, om spänningsfall ska vara 1,2 V.

Lösning: Formler: $U_{ab} = U_a - U_b = \int_a^b E \cdot d\bar{r}$

(oberoende av väg)

Vi har $E_x(x)$, vi gör i x-riktni, som är det intressanta i det här fallet.

a och b?

Okända, men mycket större än x_0!
(lysdiod typ 1 mm i allfall).

Sätter till $\pm\infty$. Vi får då spänningen som

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} E_x \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} E_0 \cdot \frac{1}{\left(\frac{x^2}{x_0^2}\right) + 1} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Substitution!} \\ u = \frac{x}{x_0} \Rightarrow dx = x_0 \cdot du \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} E_0 \cdot \frac{x_0}{u^2 + 1} du = E_0 x_0 \left[\arctan(u) \right]_{-\infty}^{\infty} =$$

$$= E_0 x_0 \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \underline{E_0 x_0 \cdot \pi}.$$

Vi söker maximala E. $\max(E) = E_0$.

$$E_0 = \frac{U}{x_0 \cdot \pi} = \left\{ \begin{matrix} U = 1{,}2\ V \\ x_0 = 3\ \mu m \end{matrix} \right\} = \frac{1{,}2\ V}{\pi \cdot 3 \cdot 10^{-6}\ m} \approx \underline{\underline{130\ kV/m}}.$$

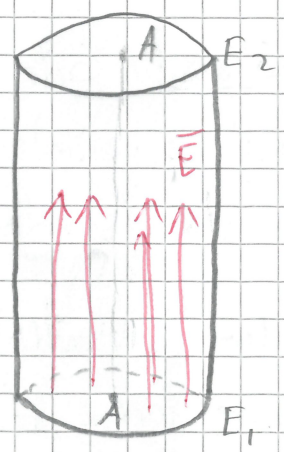
Åskmoln Givet: $E_y(2150\ m) = 47{,}1\ kV/m$
$E_y(2210\ m) = 36{,}4\ kV/m$ (båda rakt uppåt)

Sökt: Laddningstätheten $\rho = Q/Volym$

Lösning: Formeln: Gauss sats!

Ytintegral. $$\oint_S \bar{E} \cdot d\bar{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Integralen över ytan = totala laddningen innesluten av ytan.
Vi antar att fältet är vertikalt och bara beror av höjden.
Som Gaussyta väljer vi en cylinder
(en låda skulle funkar lika bra, men cylinder lättare att rita)



Från Gauss Sats ser vi att <u>bara ändytorna</u> ger bidrag till integralen. Mantelytan är vinkelrätt mot $\bar{E}$
$\Rightarrow$ skalärprodukten $= 0$.

Vi får därför att ytintegralen blir

$$\oiint \bar{E} \cdot d\bar{S} = E_2 \cdot A - E_1 \cdot A$$

A är ändytans area, så om vi sätter $h_1 = 2150\,m$, $h_2 = 2210\,m$ så får vi volymen $V = A \cdot (h_2 - h_1)$.

Vi får därmed laddningstätheten som

$$\rho = \frac{Q}{V} = \left\{ \oiint E \cdot dS = \frac{Q}{\varepsilon_0} \right\} = \frac{\varepsilon_0 (E_2 \cdot A - E_1 \cdot A)}{A(h_2 - h_1)} =$$

$$= \varepsilon_0 \cdot \frac{E_2 - E_1}{h_2 - h_1} = \frac{36{,}4\,kV/m - 47{,}1\,kV/m}{2210\,m - 2150\,m} \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{F}{m} \approx$$

$$\approx -1{,}6 \cdot 10^{-9}\,\frac{V \cdot F}{m^3} = \left\{ \begin{array}{l} V \cdot F = \frac{kg \cdot m^2}{A \cdot s^3} \cdot \frac{A^2 s^4}{kg \cdot m^2} = \\ = A \cdot s = C \end{array} \right\} = \underline{\underline{-1{,}6\,C/m^3}}.$$

Farad = Coulomb/Volt.

<u>Svar:</u> Laddningstätheten är $-1{,}6\,C/m^3$.

<u>Extrauppgifter</u>

<u>Bildrör 1</u> <u>Givet:</u> Går från potential $U_1 = -100V$ till potential $U_2 = -10\,V$.

<u>Sökt:</u> Hastigheten då de når ringelektroden.

<u>Lösning:</u> Formler: Potentiell energi $W = qU$, energi som krävs för att flytta laddningen från potential 0 till potential U.

I vårt fall: flyttar från U_1 till U_2.

potentiell energi: $W = q \cdot (U_2 - U_1) = q(-10 - (-100)) = 90q$. [J]

Den potentiella energin övergår i kinetisk energi!

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \qquad W = E_k$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{2 \cdot \frac{90q}{m}} = \sqrt{\frac{180q}{m}}$$

Vi har elektroner $\Rightarrow$ $q = e$, $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg

$$\Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{180e}{m_e}} \approx \sqrt{\frac{180 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}} \approx \underline{\underline{5{,}6 \cdot 10^{6}\ \text{m/s}}}.$$

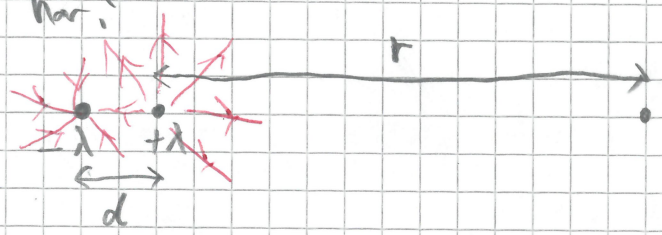
($\approx 2\%$ av c) $\Rightarrow \gamma \approx 1{,}0002$. Klassiskt OK!

<u>Elstängsel</u> <u>Givet:</u> två trådar, ~1 cm mellan, motsatta laddningar.

<u>Sökt:</u> Relativ fältstyrka 3 dm bort och 1 m bort.

<u>Lösning:</u> Formler! $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ från linjeladdning.

Vi har:



Vill hitta $|\vec{E}|$ avstånd r bort!

$$E_{tot} = E_1 + E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} + \frac{(-\lambda)}{2\pi\varepsilon_0(r+d)} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+d}\right) =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\left(1+\frac{d}{r}\right)}{r+d} - \frac{1}{r+d}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{d}{r(r+d)}\right) \approx \left\{d \ll r\right\} \approx \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{d}{r^2}\right)$$

Kvoten mellan E på avstånd $r_1 = 0{,}3$ m och $r_2 = 1$ m blir då

$$\frac{E(r_1)}{E(r_2)} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \left(\frac{1}{0{,}3}\right)^2 \approx \underline{\underline{11}}$$

Fältet på 3 dm är alltså 11 ggr starkare än på 1 m.