Övning 3 Kondensatorer

Håkan Wennlöf
hwennlof@kth.se

Teori

Kondensator



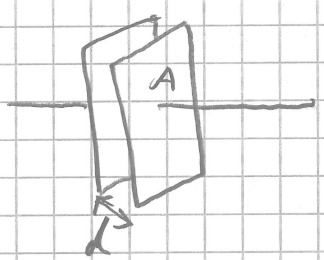
Lagrar laddning Q, och energi W, när man lägger spänning U över den.

Kapacitans [F] ett mått på lagrade laddningen $C = \frac{Q}{U}$ $\left[F = \frac{C}{V}\right]$

$$W = \frac{1}{2} C U^2 \qquad Q = CU$$

Plattkondensator

Två elektriskt ledande plattor, area A, avstånd d mellan



Kapacitans $C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d}$

ε_r relativa permittiviteten i materialet mellan plattorna. Materialparameter

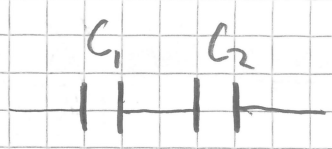
ε_0 elektriska konstanten, vakuumpermittiviteten.

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m.

E-fältstyrkan mellan plattorna:

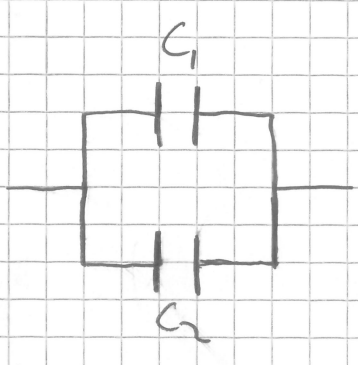
$$E = \frac{U}{d}.$$

Seriekoppling av kondensatorer



$$\frac{1}{C_{tot}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Parallellkoppling av kondensatorer



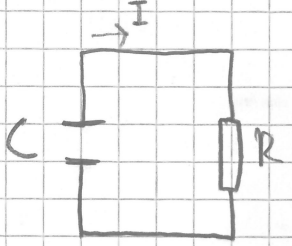
$$C_{tot} = C_1 + C_2$$

(Så tvärtom mot resistorer!)

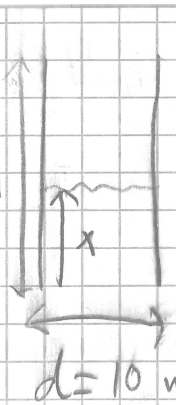
RC-krets Urladdningen (spänningsminskningen) av en kondensator med kapacitans C över en resistans R sker med en tidskonstant $\tau_{RC} = R \cdot C$.
Spänningen sjunker som $U(t) = U_0 \cdot e^{-t/\tau_{RC}}$.
τ_{RC} tiden då spänningen är $\frac{1}{e}$ av ursprungligen värdet.

Kommer av Kirchhoffs strömlag, där strömmen i kondensatorn måste vara samma som strömmen i resistorn

$$C \cdot \frac{dU}{dt} + \frac{U}{R} = 0 \Rightarrow U(t) = U_0 \cdot e^{-t/R \cdot C}$$



Oljenivåmätare Givet:

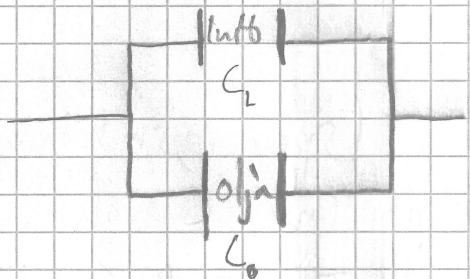


Bredd $b = 120$ mm

$\varepsilon_r = 5,6$

Sökt: $C(x)$. Plotta.

Lösning: Man kan se sys'temet som två parallellkopplade kondensatorer



Totala kapacitansen blir då

$C = C_L + C_o$ (Parallellkoppling av kondensatorer)

För luftdelen får vi

$$C_L = \varepsilon_0 \varepsilon_{r,luft} \frac{A_L}{d} = \{\varepsilon_{r,luft} = 1\} = \varepsilon_0 \frac{A_L}{d}$$

För oljan:

$$C_o = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A_o}{d}$$

$$\Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0}{d}\left(A_L + \varepsilon_r A_o\right)$$

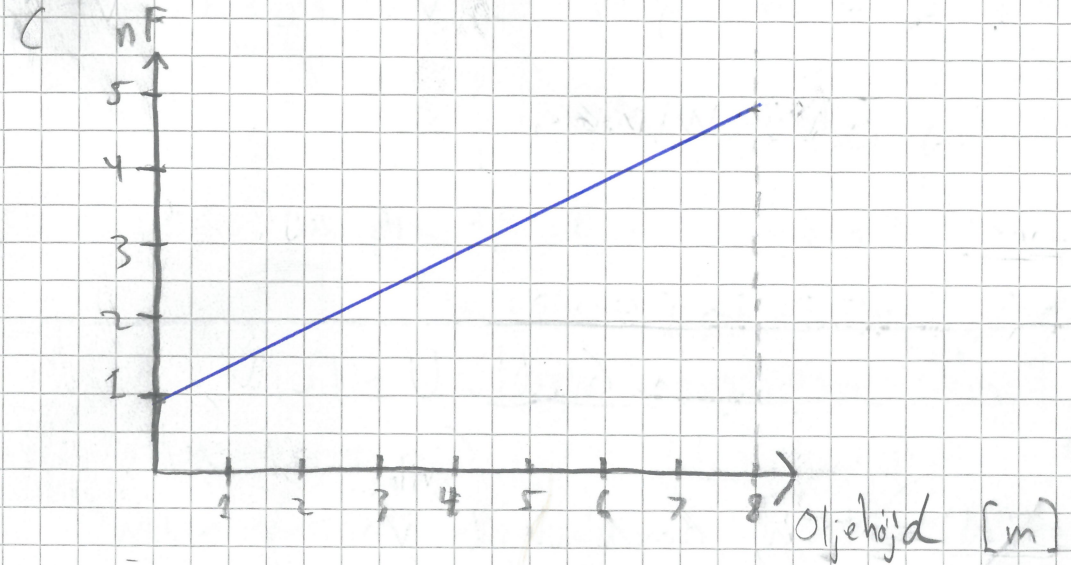
$$A_o = x \cdot b \quad , \quad A_L = (h-x) \cdot b$$

$$\Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 b}{d}\left(h - x + \varepsilon_r x\right) = \frac{\varepsilon_0 b h}{d} + \frac{\varepsilon_0 b(\varepsilon_r - 1)}{d} x = C(x)$$

Rätt linje! Går från $C(0\,m) = \frac{\varepsilon_0 b h}{d} =$

$$= \frac{8{,}85\cdot10^{-12}\ \frac{F}{m}\cdot 0{,}12\,m\cdot 8\,m}{0{,}01\,m} \approx \underline{0{,}85\ nF}$$

till $C(h) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r b h}{d} = \frac{8{,}85\cdot10^{-12}\ \frac{F}{m}\cdot 5{,}6\cdot 0{,}12\,m\cdot 8\,m}{0{,}01\,m} \approx \underline{4{,}8\ nF}$.



Gnistan Sökt: Energin i gnistan mellan finger och vattenkran

Givet: Avstånd $d = 9$ mm.

Lösning: När blir det gnistan?

När det elektriska fältet kommer upp i storleken för överslagsfältet i luft!

$E_B \approx 2$ MV/m.

Antag att fingertopp och vattenkran är två plattor i en plattkondensator.

Plattavstånd $d = 9$ mm. Arean?

Tar $A = 1\ cm^2$.

Relativ permittiviteten hos luft är $\varepsilon_r \approx 1$.

Energin lagrad i kondensatorn precis innan gnistan är $W = \frac{1}{2} C U^2$. Vi får

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{A}{d}\cdot(E_B\cdot d)^2 = \frac{1}{2}\cdot 8{,}85\cdot10^{-12}\,\frac{F}{m}\cdot 1\cdot\frac{10^{-4}\,m^2}{9\cdot10^{-3}\,m}\cdot\left(2\cdot10^6\,\frac{V}{m}\cdot 9\cdot10^{-3}\,m\right)^2$$

$$\approx 1{,}6\cdot10^{-5}\ F\cdot V^2 = 1{,}6\cdot10^{-5}\ J = \underline{16\ \mu J}$$

$$\left[F=\frac{C}{V}\Rightarrow F\cdot V=C\Rightarrow FV^2=CV\ ,\ C=A\cdot S,\ V=\frac{W}{A}\right.$$

$$\left.\Rightarrow C\cdot V = W\cdot S = J\right]$$

Svar: Energin i gnisten är 16 μJ.

Kondensatormikrofon Givet: $U = 12$ V,

$C_{vila} = 11\ \mu F$.

Sökt: Ström, om plattavstånd varierar mellan

$d_1 = 0{,}495$ mm och $d_2 = 0{,}505$ mm.

Lösning: Hur varierar plattavståndet?

Ljud. Antar sinus!

$$d = a_0 + a_1\cdot\sin(\omega t)\ ,\ \omega = 2\pi f$$

Får då att $a_0 = 0{,}500$ mm, $a_1 = 0{,}005$ mm $= 5\ \mu$m

Har vidare $f = 500$ Hz.

Kapacitansen ges av

$$C = \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{A}{d}$$

Plattkondensatorn A är arean.

Eftersom d beror av tiden så beror C av tiden.

Laddningen som är lagrad i kondensatorn ges av $Q = CU$, varierar därmed också!

Varierande laddning ger upphov till en ström.

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

$$I = U\frac{dC}{dt} = U\cdot\frac{\partial C}{\partial d}\frac{\partial d}{\partial t} = -U\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{A}{d^2}\cdot a_1 w\cos(wt) =$$

$$= -U\varepsilon_0\varepsilon_r A\cdot\underbrace{\frac{1}{(a_0+a_1\cdot\sin(wt))^2}}_{\approx\ \frac{1}{(a_0)^2}\ (a_1 \ll a_0)}\cdot a_1 w\cdot\cos(wt)$$

$$\approx -U\varepsilon_0\varepsilon_r\underbrace{\frac{A}{a_0}}_{=C_{villa}}\cdot\frac{1}{a_0}\cdot a_1 w\cdot\cos(wt)$$

$$= -12\ V\cdot 11\cdot10^{-6}\ F\cdot\frac{5\ \mu m}{0{,}5\ mm}\cdot 2\pi\cdot 500\ Hz\cdot\cos(2\pi f\cdot t)$$

$$= \left\{[F]=\frac{C}{V},\ [C]=A\cdot s\right\} \approx -4{,}1\ mA\cdot\cos(2\pi f\cdot t)\ .$$

Givarsignal Givet: Kapacitans per längd,

$$c = \frac{C}{L} = 80\ pF/m.$$

Resistans per längd $r = \frac{R}{L} = 0{,}04\ \Omega/m$.

$t = 100$ ns.

Sökt: Maximal längd så att det funkar.

Lösning: Vill ha: Längd så att

$t \le \tau_{RC}$. Tiden måste vara mindre än RC-konstanten.

RC-konstant: Tiden det tar att förra laddningen till $\frac{1}{e}$ av startladdningen.

Gräns för att ny signal ska kunna upptäckas!

Behandlar som RC-krets. Vi har

$$\tau_{RC} = R \cdot C = \frac{R}{L} \cdot L \cdot \frac{C}{L} \cdot L = r_l c_l \cdot L^2$$

$$\Rightarrow L = \sqrt{\frac{\tau_{RC}}{r_l \cdot c_l}} = \sqrt{\frac{100\ ns}{0{,}14 \frac{\Omega}{m} \cdot 80 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}}} \approx$$

$$\approx \left\{ \Omega = \frac{V}{A},\ F = \frac{S}{V} \Rightarrow F \cdot \Omega = \frac{C}{A} = S \right\} \approx$$

$$\approx \underline{\underline{177\ m}}.$$

Pixelkondensator **Givet:** Vill maximera energi/volym.

Sökt: Hur inverkar plattavstånd, plattarea och isoleringsmaterial? Vilka parametrar på isoleringsmaterialet är avgörande?

Lösning:

Energi per volym?

Vi har energi $W = \frac{1}{2} C U^2$

E-fältet mellan plattorna ges av

$$E = \frac{U}{d} \Rightarrow U = E \cdot d.$$

Har också att $C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d}$.

$$\Rightarrow W = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d} \cdot E^2 \cdot d^2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot E^2 \cdot \underbrace{A \cdot d}_{= \text{Volym}}.$$

$$\Rightarrow w = \frac{W}{V} = \underline{\underline{\varepsilon_0 \varepsilon_r E^2}}.$$ Så energi per volym beror ej av area eller plattavstånd.

- ε_r spelar roll.
- Maximala möjliga E spelar roll! $E_{överslag}$ (dvs överslagshållfastheten spelar roll)

Exkramuppgifter

Alkometer Givet: $U = 12\ V$, $A = 8{,}0\ cm^2$

$E_{max} = 50\ kV/m$.

Sökt: Högsta kapacitansen?

Lösning: Mellan plattor: E-fältstyrka given av

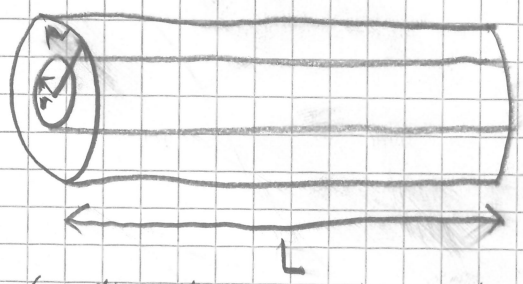
$$E = \frac{U}{d} \Rightarrow d = \frac{U}{E}$$

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A \cdot E}{U}$$

Maximal då $E = E_{max}$

$$\Rightarrow C_{max} = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \cdot 1 \cdot \frac{8 \cdot 10^{-4}\ m^2 \cdot 50 \cdot 10^3 \frac{V}{m}}{12\ V} \approx 30 \cdot 10^{-12}\ F \approx 30\ pF$$

Koaxialkabel Givet:



1 fina, 2 ytor, r' ytterradie, r innerradie, L längd

$L_2 = 0{,}75 L_1$, $r_2 = 1{,}5 r_1$, $r' = 2 r_1$.

Sökt: Hur mycket snabbare blir den? $\frac{\tau_{RC,1}}{\tau_{RC,2}}$.

Lösning: Tidskonstanten ges av $\tau_{RC} = R \cdot C$.

Kapacitansen är (för cylinderkondensator)

$$C = L \cdot \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{r'}{r}\right)}$$

Kap. 24.1 i boken

Resistansen är $R = \frac{\rho L}{A} = \frac{\rho L}{\pi r^2}$, ρ resistivitet.

Vi får då:

$$\tau_{RC} = R \cdot C = \frac{\rho L}{\pi r^2} \cdot L \cdot \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{r'}{r}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{\tau_{RC,1}}{\tau_{RC,2}} = \frac{\frac{\rho L_1}{\pi r_1^2} \cdot L_1 \cdot \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{r'}{r_1}\right)}}{\frac{\rho L_2}{\pi r_2^2} L_2 \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(r'/r_2\right)}} =$$

$$= \frac{\frac{L_1^2}{r_1^2 \cdot \ln(r'/r_1)}}{\frac{L_2^2}{r_2^2 \cdot \ln(r'/r_2)}} = \frac{\frac{L_1^2}{r_1^2 \cdot \ln(2)}}{\frac{0{,}75^2 L_1^2}{1{,}5^2 r_1^2 \cdot \ln\left(\frac{2r_1}{1{,}5r_1}\right)}} = \left(\frac{1{,}5}{0{,}75}\right)^2 \cdot \frac{\ln\left(\frac{2}{1{,}5}\right)}{\ln(2)}$$

$$\approx 1{,}66.$$

Svar: Den blir 66 % motbane!