Namn: .... Personnummer: ....

Övningslappskrivning 2: Lösningsförslag

Mndag 25 april 2016 8:15-9:45
Differential- och integralkalkyl II, del 2, SF1603, Flervariabelanalys
Inga hjälpmedel är tillåtna.
Max: 12 poäng

1. (4 poäng) Bestäm massan av en cylinder C med radie 2 cm och höjd 10 cm, om tätheten i en punkt h cm från botten och r cm från cylinderaxeln är $h^3(2-r)$.

   Lösning: Massan M ges as

   $$M = \int_C \rho dxdydz,$$

   där $\rho(x,y,z)$ är cylinderns täthet. Med hjälp av cylindriska koordinater

   $$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = h, \qquad dxdydz = rdrd\varphi dh,$$

   får vi

   $$M = \int_0^{10}\int_0^{2\pi}\int_0^2 h^3(2-r)rdrd\varphi dh = 2\pi\left(\int_0^{10} h^3dh\right)\left(\int_0^2(2-r)rdr\right)$$
   $$= 2\pi\cdot 2500\cdot\frac{4}{3} = \frac{20000\pi}{3}.$$

2. (4 poäng) Bestäm krökningen av kurvan $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3, 1)$ i punkten $\mathbf{r}(2)$.

   Lösning: Krökningen ges av

   $$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}.$$

   Då

   $$\mathbf{r}'(t) = (2t, 3t^2, 0), \qquad \mathbf{r}''(t) = (2, 6t, 0),$$

   finner vi

   $$\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ 2t & 3t^2 & 0\\ 2 & 6t & 0\end{vmatrix} = (12t^2-6t^2)\mathbf{e}_3 = (0,0,6t^2).$$

   Alltså blir krökningen

   $$\kappa(t) = \frac{|(0,0,6t^2)|}{|(2t,3t^2,0)|^3} = \frac{6t^2}{(4t^2+9t^4)^{3/2}}.$$

   Evaluering vid $t=2$ ger

   $$\kappa(2) = \frac{24}{160^{3/2}} = \frac{3}{80\sqrt{10}}.$$

3. (4 poäng) Bestäm de globala extremvärdena för funktionen $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ i området

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0,\ 0 \leq y \leq 3,\ y \geq x\}.$$

Lösning: Vi beräknar

$$f'_x = 2x - 2, \qquad f'_y = 2y - 4.$$

Det följer att de stationära punkterna är lösningar till

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0, \\ 2y - 4 = 0. \end{cases}$$

Alltså finns en stationär punkt i $(x,y) = (1,2)$. Denna punkten ligger i D och $f(1,2) = -5$.
Området D är en rätvinklig triangel begränsad av de tre sidorna

$$S_1 = \{(x,x) | 0 \leq x \leq 3\}, \qquad S_2 = \{(x,3) | 0 \leq x \leq 3\},$$
$$S_3 = \{(0,y) | 0 \leq y \leq 3\}.$$

Max och min på S_1. Låt $h_1(x) = f(x,x) = 2x^2 - 6x$, $0 \leq x \leq 3$, vara restriktionen av f till S_1. Eftersom $h_1'(x) = 4x - 6$, finns det en stationär punkt i $x = 3/2$. Vi har

$$h_1(0) = 0, \qquad h_1\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{2}, \qquad h_1(3) = 0,$$

alltså ges max och min värdena för h_1 på $[0,3]$ av 0 och $-\frac{9}{2}$, dvs, max och min värdena för f på S_1 är 0 och $-\frac{9}{2}$.
Max och min på S_2. Låt $h_2(x) = f(x,3) = x^2 - 2x - 3$, $0 \leq x \leq 3$, vara restriktionen av f till S_2. Eftersom $h_2'(x) = 2x - 2$, finns det en stationär punkt i $x = 1$. Vi har

$$h_2(0) = -3, \qquad h_2(1) = -4, \qquad h_2(3) = 0,$$

alltså ges max och min värdena för h_2 på $[0,3]$ av 0 och -4, dvs, max och min värdena för f på S_2 är 0 och -4.
Max och min på S_3. Låt $h_3(y) = f(0,y) = y^2 - 4y$, $0 \leq y \leq 3$, vara restriktionen av f till S_3. Eftersom $h_3'(y) = 2y - 4$, finns det en stationär punkt i $y = 2$. Vi har

$$h_3(0) = 0, \qquad h_3(2) = -4, \qquad h_3(3) = -3,$$

alltså ges max och min värdena för h_3 på $[0,3]$ av 0 och -4, dvs, max och min värdena för f på S_3 är 0 och -4.
Sammanfattning: Extremvärdena för f antas antingen vid en stationär punkt i det inre av D eller i en punkt på randen av D. Det följer att f's maxvärde på D är 0 (det antas på randen) och f's minvärde på D är -5 (det antas vid den inre stationära punkten).

Extrauppgifter

- Bestäm max och min värdena för $f(x,y) = x - y$ under bivillkoret $x^2 + 3y^2 = 2$.

  Lösning: Låt $g(x,y) = x^2 + 3y^2 - 2$ så att bivillkoret är $g(x,y) = 0$. Eftersom

  $$\nabla f = (1, -1), \qquad \nabla g = (2x, 6y),$$

  kan Lagranges ekvation $\nabla f = \lambda \nabla g$ skrivas

  $$\begin{cases} 1 = \lambda 2x, \\ -1 = \lambda 6y. \end{cases}$$

  Genom att eliminera λ ser vi att $y = -\frac{x}{3}$. Vi sätter in detta i ekvationen för bivillkoret:

  $$x^2 + 3\Big(-\frac{x}{3}\Big)^2 = 2 \quad \text{dvs} \quad x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

  Alltså har f extremvärden i punkterna

  $$\Big(\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\Big) \quad \text{och} \quad \Big(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\Big).$$

  Det följer att max och min värdena för $f(x,y)$ under det givna bivillkoret är

  $$f\Big(\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\Big) = 2\sqrt{\frac{2}{3}}, \qquad f\Big(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\Big) = -2\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

- Beräkna $\iint_Y f(x,y,z)dS$ där $f(x,y,z) = y$ och ytan Y har parameterframställningen

  $$\mathbf{r}(u,v) = (u, v^3, u+v), \qquad 0 \le u \le 1, \quad 0 \le v \le 1.$$

  Lösning: Integralen ges av

  $$\iint_Y f(x,y,z)dS = \int_0^1 \int_0^1 f(\mathbf{r}(u,v))|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| dvdu.$$

  Eftersom

  $$\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = (1,0,1) \times (0, 3v^2, 1) = (-3v^2, -1, 3v^2),$$

  får vi

  $$|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| = \sqrt{9v^4 + 1 + 9v^4} = \sqrt{18v^4 + 1}.$$

  Det följer att

  $$\begin{aligned} \iint_Y f(x,y,z)dS &= \int_0^1 \int_0^1 v^3\sqrt{18v^4+1}dvdu \\ &= \int_0^1 v^3\sqrt{18v^4+1}dv \\ &= \frac{2}{3\cdot 4\cdot 18}(18v^4+1)^{3/2}\Big|_0^1 \\ &= \frac{19^{3/2} - 1}{108} \approx 0.75758. \end{aligned}$$

- Beräkna integralen $\displaystyle\int_2^3 \int_0^{\sqrt{3x-x^2}} \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}} dydx.$

Lösning: Ett variabelbyte till polära koordinater,

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad dxdy = rdrd\theta,$$

ger

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \int_0^{\sqrt{3x-x^2}} \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}} dydx &= \int_0^{\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{\frac{2}{\cos\theta}}^{3\cos\theta} \frac{1}{r} r dr d\theta \\
&= \int_0^{\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(3\cos\theta - \frac{2}{\cos\theta}\right) d\theta \\
&= \left(3\sin\theta - 2\ln|\sec x + \tan x|\right)\Big|_0^{\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= 3\sin\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2\ln\left|\sec\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\right| \\
&= 3\frac{1}{\sqrt{3}} - 2\ln\left|\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right| \\
&= \sqrt{3} - 2\ln(\sqrt{3}+1) + \ln 2.
\end{aligned}$$

- Låt $n \geq 1$ vara ett heltal. Härled ett uttryck för n-te derivatan $f_n^{(n)}(t)$ av funktionen

$$f_n(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \sin(s) ds.$$

Lösning: Om $n = 1$ har vi $f_1(t) = \int_0^t \sin(s)ds$ så $f_1'(t) = \sin t$. Om $n = 2$ har vi $f_2(t) = \int_0^t (t-s)\sin(s)ds$ så

$$f_2'(t) = \int_0^t \sin(s)ds + (t-t)\sin(t) = f_1(t), \qquad f_2''(t) = \sin t.$$

Mer allmänt gäller

$$\begin{aligned}
f_{n+1}'(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{(t-s)^n}{n!} \sin(s)ds \\
&= \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \sin(s)ds + \frac{(t-t)^n}{n!} \sin(t) = f_n(t), \qquad n \geq 1.
\end{aligned}$$

Så om vi antar att $f_n^{(n)}(t) = \sin t$, så följer att $f_{n+1}^{(n+1)}(t) = \sin t$. Induktion ger därför att $f_n^{(n)}(t) = \sin t$ för alla $n \geq 1$.