

Övning 5

Håkan
Wennlöf
hwennlof@kth.se

Induktion

- Magnetiska flödet genom area $\vec{A} = A \cdot \hat{n}$, $\hat{n}$ ytas normalvektor, i magnetfältet $\vec{B}$ ges av

$$\Phi = \vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos \theta$$

$$[Wb = Vs = T \cdot m^2]$$



- Inducerade spänningen i slinga/spole ges av

$$U = N \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

N antal varv i spolen, Φ magnetiska flödet.
(dvs ändring i magnetiskt flöde ger spänning)

- Ömsesidig induktans mellan två spolar 1 och 2

$$M = N_1 \frac{\Phi_1}{I_2} \quad [H]$$

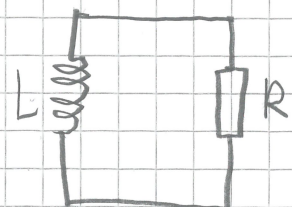
Φ_1 flöde i spole 1, I_2 ström i spole 2.

- RL-krets Ström i spole ökar enligt

$$I(t) = I_0 (1 - e^{-t/\tau_{RL}})$$

Minskar enligt $I(t) = I_0 \cdot e^{-t/\tau_{RL}}$

$$\tau_{RL} = \frac{L}{R}, \quad I_0 = \frac{U}{R}$$



L självinduktansen i spolen.

- Självinduktans

$$L = N \cdot \frac{\Phi}{I} \quad [H]$$

Spolens eget flöde inducerar en ström i den,

Induktion Givet: Kvadratisk, sidan $s = 5 \text{ cm}$.

Frekvens $f = 200 \text{ Hz}$.

$$B = B_0 \sin(\Omega t + \varphi), \quad B_0 = 0,17 \text{ T}$$

Sök: Maximala absöbrade spänningen.

Lösning: Ω beöecknas här $\Omega = 2\pi f$.

Inducerad spänning ges av

$$U = N \cdot \frac{d\Phi}{dt} \quad [\text{V}]$$

Φ är magnetiska flödet.

Magn. flödet genom arean A av fältet $\vec{B}$ ges av

$$\Phi = \vec{A} \cdot \vec{B}, \quad \text{där } \vec{A} = A\hat{n}, \quad \hat{n} \text{ ytans normal.}$$

Maximalt då parallella, dvs $\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B$.



Vi får flödet som

$$\Phi = A \cdot B = s^2 \cdot B_0 \cdot \sin(2\pi f \cdot t + \varphi)$$

Den inducerade spänningen blir då

$$U = \frac{d\Phi}{dt} = s^2 \cdot B_0 \cdot 2\pi f \cdot \cos(2\pi f t + \varphi).$$

Maximalt då cos-termen är 1.

Vi får

$$U_{\max} = s^2 \cdot B_0 \cdot 2\pi f = (0,05 \text{ m})^2 \cdot 0,17 \text{ T} \cdot 2\pi \cdot 200 \frac{1}{\text{s}}$$

$$\approx \left\{ \left[\frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} \right] \right\} \approx \underline{\underline{0,53 \text{ V}}}.$$

Magnetpulser Givets Pulsavslängd endast mikrosekunder,

Spole med längd $D = 2,2 \text{ cm}$, $N = 2000$ varv

Tvårsnittsdiameter $d = 8,1 \text{ cm}$.

Lindningsstråd: tvårsnittsyta $A = 0,2 \text{ mm}^2$

Sök: Går detta?

Lösning: Vi vill ha pulslängd på en viss tid,

Vad blir tidskonstanten för spolen?

Strömmen laddas ju ur som

$$I(t) = I_0 \cdot e^{-t/\tau_{RL}}$$

Hinner spolen med?

$$\tau_{RL} = \frac{L}{R}$$

Resistansen R : $R = \frac{\rho \cdot L}{A}$, där

ρ är trådens resistivitet, L trådens längd, och A tvårsnittsytan,

Ett varv har längden $2\pi \cdot \frac{d}{2}$. N varv ger
då $L = N \cdot \pi \cdot d$.

För ρ så antar vi koppar (men de flesta metaller
samma storleksordning). $\rho_{Cu} \approx 1,68 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$
(vid $20^\circ C$)

Vi får då

$$R = \frac{1,68 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m \cdot 2000 \cdot \pi \cdot 0,081 \text{ m}}{0,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2}$$
$$\approx 42,8 \Omega$$

För induktansen L har vi $L = N \cdot \frac{\Phi}{I}$.

Φ ? Magnetfältet som flödar genom arean?

$\Phi = A \cdot B$. Vi har tvärsnittsarean, så $A = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2$

Fältet ges av (kortspole) $B = \frac{N \mu_0 I}{2 \left(\frac{d}{2}\right)}$

Vi får alltså $\Phi = N \cdot \pi \cdot \mu_0 \cdot I \cdot \frac{d}{4}$

$$\Rightarrow L = N \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 \pi N^2 d}{4}$$

Totalt har vi nu $\tau_{RL} = \frac{L}{R} = \frac{\frac{\mu_0 \pi N^2 d}{4}}{\frac{8 \cdot N \cdot \pi d}{A}} = \frac{\mu_0 N A}{4 \rho}$

$$\text{Vi får } \tau_{RL} = \frac{4 \pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2} \cdot 2000 \cdot 0,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2}{4 \cdot 1,68 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}} \approx$$

$$\approx \left\{ [L] = \frac{W}{A^2} \right\} \approx 7,5 \cdot 10^{-3} \frac{Nm}{V/s} = 7,5 \cdot 10^{-3} s = \underline{\underline{7,5 \text{ ms}}}$$

Tidskonstanten är 7,5 ms!

Vi vill ha puls på mikrosekunder, så vi är en faktor 1000 fel. Går inte!

(Kort spole bra uppskattning. Faktor 1000 för dålig tid, och så fel har vi inte).

Cykellyse Giveti



50 magneter, växelvis på olika håll.

Snurrar 1,5 varv/sekund

Vill ha $U = 3 \text{ V}$.

Tväreniityta $A = 2,0 \text{ cm}^2$, $B = 0,40 \text{ T}$.

Såkl: Antal varv i spolen fältet leds genom.

Lösning: Vi har 50 magneter på hjulet.

Det betyder att $1,5 \cdot 50 = 75$ magneter passerar oket på en sekund,

Tiden det tar att byta magnet som är "aktiv" (dvs framför oket) blir därmed

$$\Delta t = \frac{1}{75} \text{ s} \approx 13,3 \text{ ms}$$

Inducerade spänningen i en spole med N varv ges av

$$U = N \cdot \frac{d\Phi}{dt}, \text{ där } \Phi \text{ är}$$

magnetiska flödet genom spolen.

Förändringen i flöde när man "byter" magnet blir

$$\Delta\Phi = B \cdot A - (-B \cdot A) = 2B \cdot A$$

(Om man tar $\Delta\Phi = -BA - BA = -2BA$ så får man till slut en negativ spänning, vilket inte gör någon skillnad. Spänning är potentialskillnad mellan två punkter; minusstecken ger bara riktning)

Vi har nu att

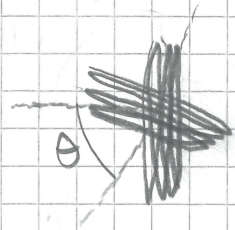
$$U = N \cdot \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = N \cdot \frac{2B \cdot A}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow N = \frac{U \cdot \Delta t}{2B \cdot A} = \frac{3V \cdot \frac{1}{25} s}{2 \cdot 0,4T \cdot 2 \cdot 10^{-4} m^2} = \left\{ [T] = \frac{V \cdot s}{m^2} \right\} = \underline{\underline{250 \text{ varv}}}$$

Tröghetsnavigering Givet: Två spolar
vinkel mellan.

Sökt: Vinkeländringen som en ändring
av ömsesidiga induktansen med $\frac{1}{10000}$

motsvarar.



Lösning:

Ömsesidiga induktansen ges av

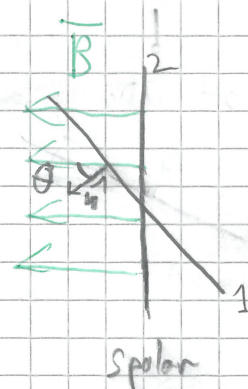
$$M = N_1 \cdot \frac{\Phi_1}{I_2} \quad [H]$$

1, 2 de två olika spolarna,

$\Phi = \vec{A} \cdot \vec{B}$, där $\vec{A}$ är arean (gänger normalvektor).

$\vec{B}$ yttre magnetfältet.

Vi har (förenklad bild)



Vi får därmed att

$$\Phi_1 = \vec{A}_1 \cdot \vec{B}_2 = A_1 B_2 \cos \theta$$

$$\Rightarrow M = N_1 \frac{A_1 B_2 \cos \theta}{I_2} = M_0 \cdot \cos \theta, \text{ där } M_0 \text{ är}$$

ömsesidiga induktionen då vinkeln mellan spolarna är 0. (A_1, B_2, I_2 ändras aldrig).

V_i har därmed att

$$M = M_0 \cdot \cos \theta.$$

V_i söker vinkeländringen som ger en ändring av M med $\frac{1}{10000}$. Kallar den för $\Delta \theta$.

För utgångsläget $\theta = 45^\circ$:

$$M_{45} = M_0 \cdot \cos(45^\circ)$$

$$M_{45+} = \left(1 - \frac{1}{10000}\right) M_0 \cdot \cos(45^\circ)$$

men även $M_{45+} = M_0 \cdot \cos(45^\circ + \Delta \theta_{45})$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{10000}\right) \cos(45^\circ) = \cos(45^\circ + \Delta \theta_{45})$$

$$\Rightarrow \Delta \theta_{45} = -45^\circ + \cos^{-1}(0,9999 \cdot \cos(45^\circ)) \approx \underline{\underline{0,006^\circ}}.$$

För utgångsläget $\theta = 0^\circ$:

$$M_0 = M_0 \cdot \cos(0^\circ) = M_0$$

$$M_{0+} = 0,9999 \cdot M_0 \cdot \cos(0^\circ) = M_0 \cdot \cos(0^\circ + \Delta \theta_0)$$

$$\Rightarrow \Delta \theta_0 = \cos^{-1}(0,9999) \approx \underline{\underline{0,81^\circ}}$$

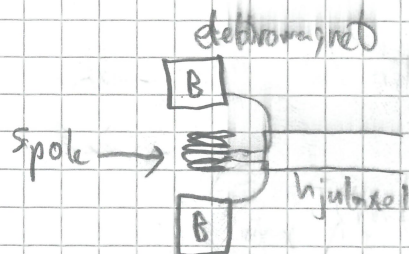
Svar: En ändring med en 10000-del motsvarar en vridning på $0,006^\circ$ om vinkeln från början är 45° , och $0,81^\circ$ om vinkeln från början är 0° .

Magnetbromsar Givet: Spole roterar i magnetfält.

Inducerade strömmen används för att skapa magnetfält.

Sök: Varför lösningsfråga?

Lösning:



Den inducerade spänningen (och därför även strömmen) är proportionell mot flödesändringen genom spolen

$$U = N \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

Så länge spolen rör sig, eller magnetfältet ändras, så induceras en spänning som driver magneterna.

Om bromsarna läser sig så slutar spolen snurra! (hjulen läsa).

Da induceras ingen spänning, så bromsverkan upphör $\Rightarrow$ hjulen börjar snurra igen, bromsas, och så vidare.

Extrappgifter Vridning Givet: Homogent magnetfält,

$$B = B_{\max} \cdot \sin(2\pi f \cdot t), \quad B_{\max} = 0,12 \text{ T}$$

$$f = 500 \text{ Hz}, \quad \text{Spolen: } N = 100 \text{ varv, diameter } d = 9,6 \text{ mm.}$$

Sök: $U_{\max}$ i spolen.

Lösning: Vi har att $U = N \frac{d\Phi}{dt}$

$$\Phi = \vec{A} \cdot \vec{B}, \quad \vec{A} \text{ arean av spolen } (A \cdot \hat{n}).$$

Som störst då parallella! Dvs $\Phi = A \cdot B$. Vi har därmed

Spänningen

$$U = N \cdot \frac{d}{dt} (A \cdot B_{\max} \cdot \sin(2\pi f \cdot t)) =$$
$$= N \cdot A \cdot B_{\max} \cdot 2\pi f \cdot \cos(2\pi f \cdot t)$$

Maximala sökt! Bli då $\cos$ -termen $= 1$

$$\Rightarrow U_{\max} = N \cdot A \cdot B_{\max} \cdot 2\pi f =$$
$$= 100 \cdot \pi \cdot \left(\frac{9.6 \cdot 10^{-3}}{2} \text{ m}\right)^2 \cdot 0.12 \text{ T} \cdot 2\pi \cdot 500 \text{ Hz}$$
$$\approx \left\{ [T] = \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} \right\} \approx \underline{\underline{2.7 \text{ V}}}$$

Ekorrhjul Givet: Magneter med omväxlande polaritet passerar genom toroidspole



+ hjul med magneter längs kanten.

Sökt: Med vilken faktor ökar effekten, om rotationshastigheten dubblas?

Lösning: Effekt: $P = U \cdot I = U^2 / R$

Spänningen ges av $U = N \cdot \frac{d\Phi}{dt}$, dvs

$$P \propto \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2$$

Magnetfältet kommer variera

som $B(t) = B_0 \cdot \sin(\omega t)$, där

ω är vinkelhastigheten (rotationshastigheten)

$$\forall t \text{ har } \Phi = A \cdot B_0 \sin(\omega t), \quad A \text{ arean.}$$

För då att $\frac{d\Phi}{dt} = A \cdot B_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$

$$\Rightarrow \boxed{P \propto \omega^2}$$

En fördubbling av rotationshastigheten ω ger
då en fördubbling av effekten
