

Övning 6

Håkan
Wennlöf

hwennlof@kth.se

Geometrisk optik

- Brytningsindex Materialparameter

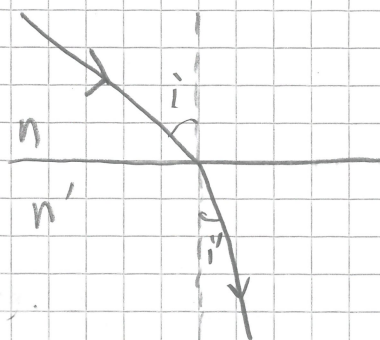
$$n = \frac{c}{v}$$

c ljushastighet i vakuum,
 v ljushastighet i material

- Snells lag Brytning i yta mellan två material med olika brytningsindex.

$$n \sin i = n' \sin i'$$

i, i' vinklarna mot ytans normal.



- Totalreflektion sker om $\frac{n \sin i}{n'} > 1$, dvs om det inte finns lösning av snells lag för i' .

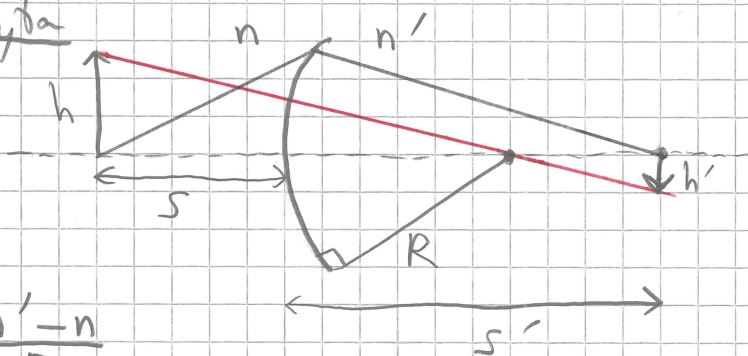
$$\text{Kan då sätta } \sin i' = 1 \Rightarrow i_{\text{gräns}} = \sin^{-1}\left(\frac{n}{n'}\right)$$

Om $i > i_{\text{gräns}}$: totalreflektion.

- Sfärisk gränsyta

s objektavstånd

s' bildavstånd

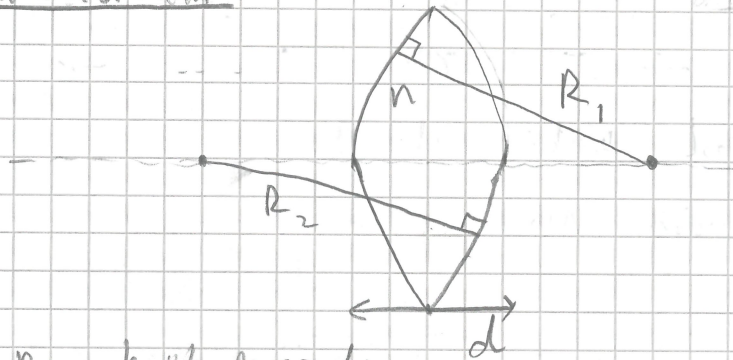


$$\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n' - n}{R}$$

Förstoring: $M = \frac{h'}{h} = -\frac{n s'}{n' s}$

— betyder reell bild,
och uppochnad.

• Linsmaker formeln

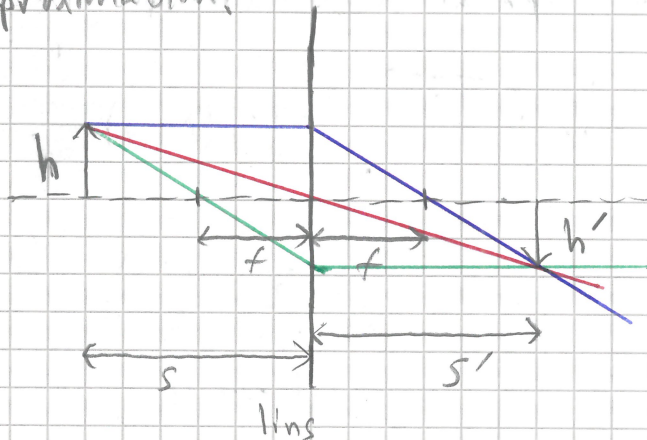


R_1, R_2 krökningsradier,

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n-1)d}{nR_1R_2} \right)$$

Teckenkonvention: R_2 negativ (krökningscentrum till vänster om linsen), R_1 positiv

• Tunn lins Approximation!



$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad , \quad f \text{ fokallängd hos linsen,}$$

$$d \rightarrow 0, \quad s \neq 0 \quad \frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Förstärkning: $M = \frac{h'}{h} = -\frac{s'}{s}$

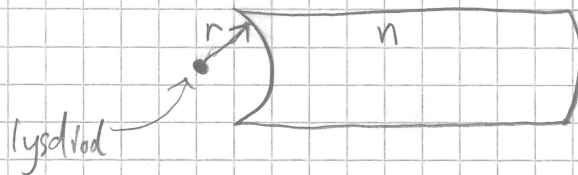
Ljusledare Givet: Cylindrisk ljusledare, $d = 1,8 \text{ mm}$.

Stärkt konv ändyta, krökningscentrum i ljuspunkten.

Lysdiod: halv konvinkel 20° .

Sökt: Brytningsindex n för förlustfritt ljusledande.

Lösning:



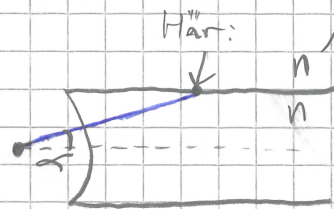
Dioden ligger i krökningscentrum

$\Rightarrow$ ljuset från dioden inkommer i ljusledaren

vinkelrätt mot ytan! Dvs ljuset går "rakt" in

$\Rightarrow$ ingen brytning sker.

Den första brytningen kommer istället ske mot "längsidan" av ljusledaren.



Vi vill hitta n s.a. brytningen resulterar i totalreflektion, dvs att ljuset studsar tillbaka in i ledaren istället för att brytas ut.

$\alpha = 20^\circ$ ger högsta kravet på n (svårast att få till totalreflektion där)

Infallsvinkeln mot

cylinderytan blir

$$i = 90^\circ - \alpha = 70^\circ$$



Totalreflektion: Snells lag: $n \sin i = n' \sin i'$, i' brytningsvinkeln, $i' = 90^\circ$ vid totalrefl. $\Rightarrow \sin i = \frac{n'}{n}$.

Vi söker n :

$$n = \frac{n'}{\sin i}, \quad n' = 1 \quad (\text{utan luft})$$
$$i = 70^\circ$$

$$\Rightarrow n = \frac{1}{\sin(70^\circ)} \approx \underline{\underline{1,06}}$$

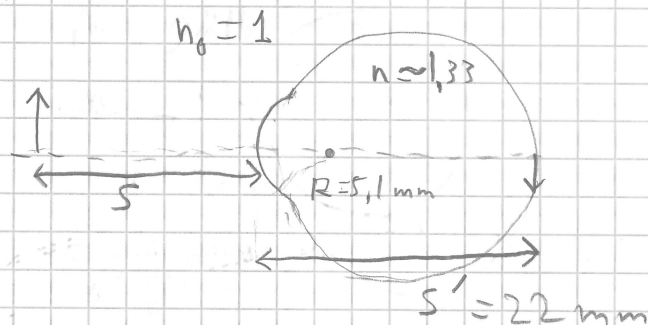
Det minsta brytningsindex som krävs för förlustfri transport är alltså $n = 1,06$.

Uppfylld av de flesta plaster.
(Vill ha $n \geq 1,06$).

Ögonmodell $n = 1,3306$. $R = 5,1 \text{ mm}$
 $s' = 22 \text{ mm}$

Sökt: Vilket objektsavstånd avbildas skarpt?

Lösning: Vi har



Söker s som ger bildavstånd $s' = 22 \text{ mm}$
(där landar bilden på näthinnan, dvs skarp avbildning).

Vi har sfärisk gränsyta.

För sfärisk gränsyta gäller

$$\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n' - n}{R}, \quad (\text{i rakt fall: } n = n_0, \quad n' = n)$$

Vi får då

$$s = \frac{n_0}{\frac{n - n_0}{R} - \frac{n'}{s'}}$$

$$\Rightarrow s = \frac{1}{\frac{1,3306-1}{5,1 \text{ mm}} - \frac{1,3306}{22 \text{ mm}}} \approx \underline{\underline{230 \text{ mm}}}$$

Växthusbelysning Givet: Kvadrat, sidan $d=12 \text{ mm}$.

Höjd $2,2 \text{ m}$. $D=1,8 \text{ m}$ mellanrum.

Sökt: Fokallängd f så att det inte finns mellanrum/överlapp i ljuset på marken.

Lösning: Vi har bildavståndet $s'=2,2 \text{ m}$

Förstoring: 12 mm ska bli 1800 mm

$$\Rightarrow M = \frac{1800}{12} = 150$$

Har också att $M = -\frac{n's'}{n's}$ (- betyder att bilden reell (inte virtuell) och uppnädd).

$n=n'$ här, minusstecken överbrögt

$$\Rightarrow s = \frac{s'}{M} = \frac{2200 \text{ mm}}{150} = 14,67 \text{ mm}$$

Objektavståndet är alltså $14,67 \text{ mm}$.

Linsformeln: $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$. Vi söker f .

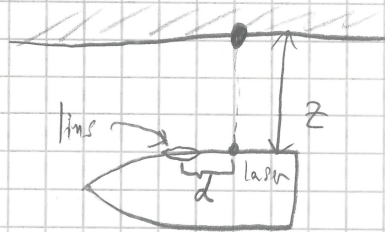
$$f = \left(\frac{1}{14,67 \text{ mm}} + \frac{1}{2200 \text{ mm}} \right)^{-1} \approx \underline{\underline{14,57 \text{ mm}}}$$

Svar: Fokallängden som linsen ska ha är $14,57 \text{ mm}$.

Triangulering Givet:

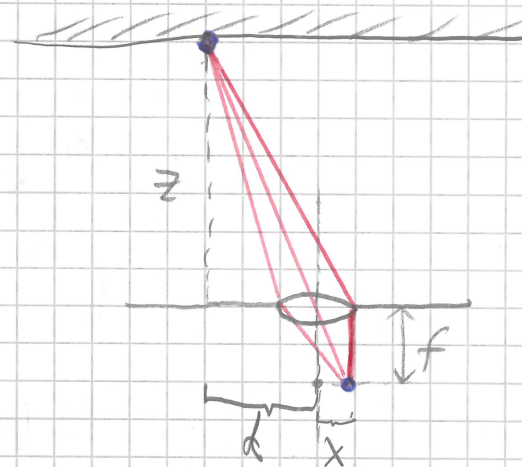
$$d = 10 \text{ cm}$$

$$f = 10 \text{ mm}$$



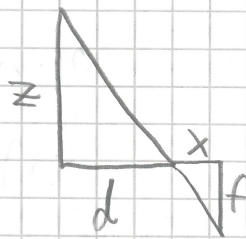
Sökt: Hur bilden av harpunkten flyttar sig,
som funktion av z , $0,3 \text{ m} \leq z \leq 3 \text{ m}$,

Lösning: Rita!



Bilden hamnar i (eller nära) linsens
fokal plan.

Lika trianglar!



$$\Rightarrow \frac{z}{d} = \frac{f}{x} \Rightarrow \underline{\underline{x(z) = \frac{f \cdot d}{z}}}$$

Bilden flyttar sig enligt $x(z) = \frac{f \cdot d}{z}$,

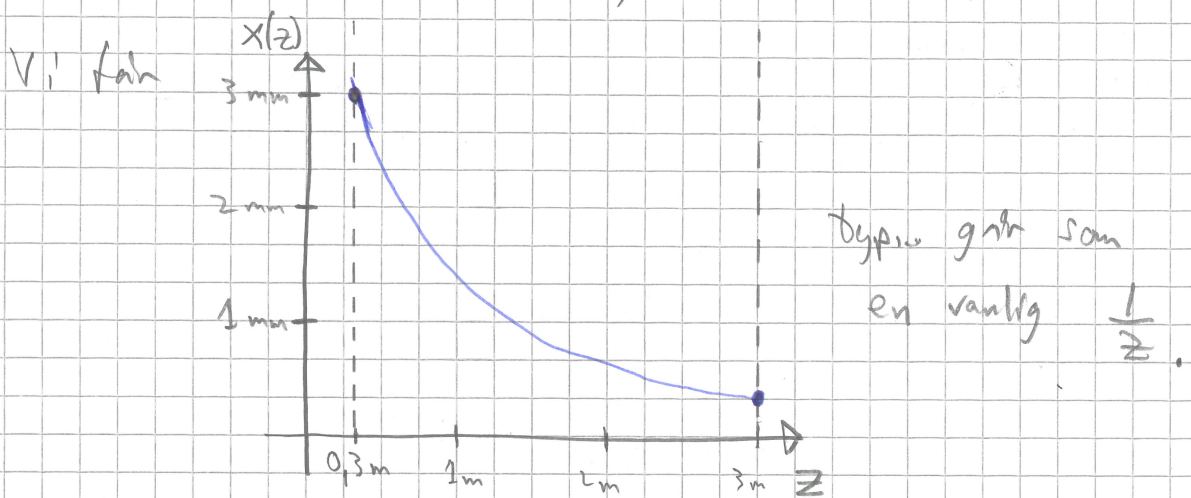
Vi har $f \cdot d = 0,1 \text{ m} \cdot 0,01 \text{ m} = 0,001 \text{ m}^2$,

Vill plotta $x(z)$ från $z = 0,3 \text{ m}$ till $z = 3 \text{ m}$.

Kommer gå som $\frac{1}{z}$. Vi får

$$x(0,3 \text{ m}) \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 3 \text{ mm},$$

$$x(3 \text{ m}) \approx 0,3 \text{ mm}$$



Dispersion Givet: Dispersion: olika våglängder bryts olika.

Relativ dispersion

$$RD = \frac{n_{\text{blå}} - n_{\text{röd}}}{n_{\text{grön}} - 1}$$

Sökt: Visa att för plankonvex lins med styrkan P

gäller att
$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{P_{\text{blå}} - P_{\text{röd}}}{P_{\text{grön}}} = RD.$$

Lösning: Plankonvex lins:



Linsmakerformeln!
$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n-1)d}{n R_1 R_2} \right)$$

R_1, R_2 krökningsradier, d linsjocklek.

Andra tunn $\Rightarrow d \rightarrow 0$

R_1 för första ytan, R_2 för andra. Tecken:

positiv om centrum för raden höger om linsen (men varierar i olika dokument/böcker),

Vi har att R_2 för plan yta, dvs $R_2 \rightarrow \infty$.

Vi får därför att
$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{R_1}$$

Styrkan P ges av $P = \frac{1}{R}$,
Vi har därmed

$$P = \frac{n-1}{R_1} \Rightarrow \frac{\Delta P}{P} = \frac{\frac{n_{\text{blå}}-1}{R_1} - \frac{n_{\text{röd}}-1}{R_1}}{\frac{n_{\text{grön}}-1}{R_1}} =$$
$$= \frac{n_{\text{blå}} - n_{\text{röd}}}{n_{\text{grön}} - 1} = RD$$

VIS. V.

Extrappgifter

Fingeravtryck Givet: Detektor, $3 \text{ mm} \times 4 \text{ mm}$,
Fingerbopp $18 \text{ mm} \times 24 \text{ mm}$.

Två tunna linser ligger ihop. $f_1 = 20 \text{ mm}$, $f_2 = 15 \text{ mm}$.

Sök: Hur ska finger och detektor placeras?

Lösning: Förstärken $M = \frac{h'}{h} = \frac{3 \text{ mm}}{18 \text{ mm}} = \frac{4 \text{ mm}}{24 \text{ mm}} = \frac{1}{6}$.

(vill få fingerboppen att passa på detektorn)

Antar att de två linserna utgör en tunn lins med
fokallängd f_{tot} .

Linsformeln ger $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f_{\text{tot}}}$.

Vi vet också att $s' = \frac{1}{6} \cdot s$

f_{tot} fås från $\frac{1}{f_{\text{tot}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$ (kommer mer i övn. 7).

Vi får därför

$$\frac{1}{s} + \frac{6}{s} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

$$\Rightarrow s = 7 \cdot \left(\frac{1}{20 \text{ mm}} + \frac{1}{15 \text{ mm}} \right)^{-1} = \underline{60 \text{ mm}}.$$

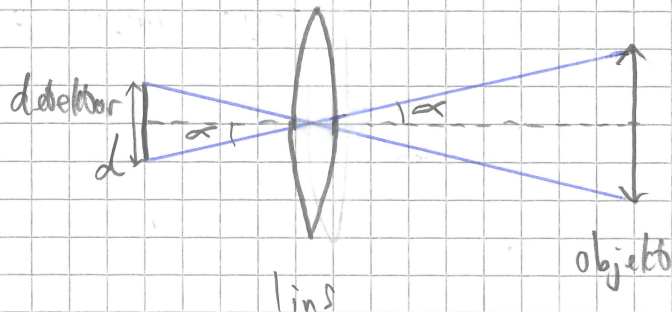
Vi får alltså

Svar: Fingertoppen ska placeras 60 mm från linserna,
och defektorn $\frac{60 \text{ mm}}{6} = 10 \text{ mm}$ ifrån.

Övervakningskamera Givet: Synfält på $\pm 45^\circ$,
bredd på chip $d = 8,10 \text{ mm}$.

Sökt: Fokallängd f .

Lösning: Allmänt har vi



För skarp bild: defektorn i linsens fokallinje!

$$\underbrace{\quad}_f, \text{ Vi får då att } \tan \alpha = \frac{\frac{d}{2}}{f} = \frac{d}{2f}$$

Vi vill ha synfält på $\pm 45^\circ$, dvs
 $\alpha = 45^\circ$ i bilden ovan. Vi har $d = 8,10 \text{ mm}$.

$$\text{Vi får då } \frac{d}{2f} = \tan \alpha \Rightarrow f = \frac{d}{2 \cdot \tan \alpha}$$

$$\Rightarrow f = \frac{8,10 \text{ mm}}{2 \cdot \tan 45^\circ} = \frac{8,10 \text{ mm}}{2} = \underline{\underline{4,05 \text{ mm}}}$$

Svar: Fokallängden som behövs för att ge ett synfält på $\pm 45^\circ$ är $f = 4,05 \text{ mm}$.