



Seminarium 5

Se www.kth.se/social/course/SF1626 för information om hur seminarierna fungerar och vad du förväntas göra inför och under seminarierna.

Detta seminarium inleds med en inlämning. Lös uppgifterna 1-4 nedan och skriv ner lösningarna med en lösning per blad. Skriv namn och personnummer på varje blad. När seminariet börjar får du veta vilken uppgift som ska lämnas in. Innan du börjar med seminarieuppgifterna ska du lösa de rekommenderade uppgifterna ur kursboken Calculus av Adams och Essex (8:e upplagan), nämligen:

Avsnitt	Rekommenderade uppgifter
15.1	3, 5, 17,
15.2	3, 5, 7, 21
15.3	7, 11
15.4	1, 5, 7, 15
15.5	1, 7, 13
15.6	5, 9, 13, 15

UPPGIFTER

Uppgift 1. Låt $\mathbf{F}$ vara vektorfältet som ges av

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^3y, xy^3)$$

för (x, y) i $\mathbb{R}^2$.

- Bestäm fältlinjerna till $\mathbf{F}$.
- Avgör om $\mathbf{F}$ är konservativt.
- Beräkna kurvintegralen $\int_{C_R} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där C_R är en cirkel med radie R med centrum i origo som genomlöps moturs.

Uppgift 2. Låt g vara funktionen som ges av

$$g(x, y) = x^2 - 5y^2$$

för alla (x, y) i $\mathbb{R}^2$.

- (a) Bestäm ett vektorfält $\mathbf{F}$ sådant att fältlinjerna till $\mathbf{F}$ är nivåkurvor till g .
- (b) Finns det flera sådana vektorfält? Går det att bestämma alla?
- (c) Finns det ett konservativt vektorfält med dessa fältlinjer?

Uppgift 3. Låt $\mathbf{F}$ vara vektorfältet som utanför origo ges av

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{ax - by}{x^2 + y^2}, \frac{bx + ay}{x^2 + y^2} \right)$$

där x och y är koordinater som mäts i meter i ett rätvinkligt koordinatystem och $a = 1,0 \text{ Nm}$, $b = 2,0 \text{ Nm}$. En partikel färdas längs en kurva C enligt

$$\mathbf{r}(t) = (Re^{-kt} \cos \omega t, Re^{-kt} \sin \omega t),$$

där $R = 6,1 \text{ m}$, $k = 3,2 \text{ s}^{-1}$, $\omega = 1,6 \text{ rad/s}$ och $0,0 \text{ s} \leq t \leq 4,5 \text{ s}$.

- (a) Beräkna kurvintegralen

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

- (b) Är $\mathbf{F}$ konservativt?

Uppgift 4. Låt S vara den yta som i sfäriska koordinater ges av $r = 2$ och $0 \leq \theta \leq \pi/3$.¹ Ytans orientering ges av att dess normalvektor pekar bort från origo.

- (a) Skissera ytan S och beräkna dess area.
- (b) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (x^2, y^2, z^2)$ genom S .

¹I boken används R istället för r för avståndet till origo. Här skrivs de sfäriska koordinaterna som r, θ och ϕ där ϕ är vinkeln mot positiva z -axeln.